

論 文

等角写像の代用電荷法への応用

村 島 定 行*

(1981年9月7日受付)

Applications of the Conformal Mapping to the Charge Simulation Method

S. MURASHIMA*

(Received September 7, 1981)

A new application technique of conformal mapping to the charge simulation method is described. This method is suitable for reducing the computing time and raising its accuracy. Considering the test function superposed in the charge simulation method as a Green's function in non-bounded region, we instantly become aware that the Green's function in bounded region is also available for the problem in a bounded region. If we use the Green's function in the bounded region under consideration, the reduction of the number of the substitute charge and the high accuracy are expected. Since the Green's functions in bounded region are usually time-consuming, the reduction of computing time is not always expected. The Green's functions, however, determined by means of conformal mapping are not so time-consuming, consequently the decrease of total computing time in the charge simulation method is achieved. In the view point of accuracy, the Green's function in bounded region always brings good results. This technique is demonstrated by analyzing the problem of the circular conducting cylinder kept at unit potential enclosed by a two grounded parallel plates etc. The results are satisfactory.

1. はじめに

代用電荷法で重ね合わせる関数は無限空間内のグリーン関数である。境界条件の一部を満たしている有限領域のグリーン関数を重ね合わせると代用電荷数が減り大幅に効率をあげることができる。

3次元の場合はグリーン関数は一般に級数や積分になって、計算は簡単ではないが、2次元の場合、等角写像を利用すると簡単にグリーン関数が求まり、計算時間も短い。代用電荷数が大幅に減り、電荷配置の最適化問題が小型化、簡単化されるなどの利点があり、応用も広く考えられる。

ここであげた手法を帯状領域、半無限長帯状領域、角領域等で利用するさいの変換式等を整理して示した。この論文で誤差といふのは常に電位の絶対誤差を意味する。

2. 電荷数低減の考え方

2.1 有限領域のグリーン関数の利用

通常グリーン関数は以下の式を満足する^{1,2)}。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

$$\phi(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

ここで (x_i, y_i) はグリーン関数の極であり、領域は D 境界は Γ で示す。(1) と (2) を満足する関数を有限領域のグリーン関数とよび、 $G(x, y; x_i, y_i)$ と表わす。点 (x, y) が (x_i, y_i) に近づくにつれ対数的に発散する。領域が無限に広い場合は

$$G(x, y; x_i, y_i) = -(1/2\pi) \log \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (3)$$

となり、通常の代用電荷法と一致する。

図 1 (a) に示すような矩形領域中のグリーン関数を使う場合を考えよう。同図(b)のような橿円状電極を矩形導体で囲んだような問題では内部電極の内側にだけグリーン関数の極を配置すればよい。同図(c)のように外部導体にへこみがあり、解析的に境界条件を満足させられなければ、そのへこみの近くに極を配置し、代用電荷法的に

* 鹿児島大学工学部電子工学科 (890 鹿児島市郡元 1-21-40)

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Kagoshima University, 21-40, Kohrimoto 1-chome, Kagoshima, 890 Japan

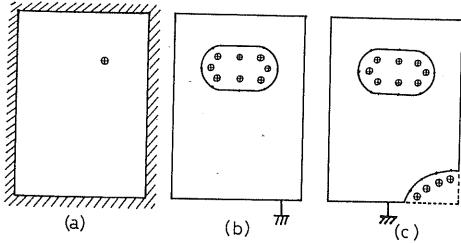


図 1 有限領域のグリーン関数の利用による電荷数の低減
Fig. 1 Reduction of charge number by the superposition of Green's function in a finite region.

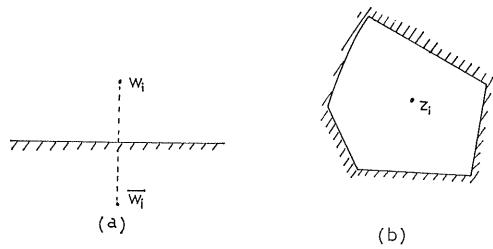


図 2 有限領域の半無限領域への写像
Fig. 2 Mapping of a finite region into semi-infinite region.

境界条件を満足させる。

このように境界の一部で解析的に境界条件を満たしているグリーン関数を使うと未知数の数が減少し、大幅に計算時間が減少する。そのうえに、精度が上がり、グリーン関数の極の位置に関する最適化問題が小さく、簡単なものになる。もちろん有限領域のグリーン関数の計算に時間と手間がかかりすぎるようでは、ここで述べた手法の効果はそれだけ割引かれる。

2.2 有限領域のグリーン関数の決定法

図 2 に示す 2 平面の限られた領域を w 平面の半無限領域に写像する関数

$$w = f(z) \quad (4)$$

が得られたとする。 w 平面の半無限領域での複素グリーン関数は影像法を利用すると

$$G(w; w_i) = -(1/2\pi) \{ \log(w - w_i) - \log(w - \bar{w}_i) \} \quad (5)$$

となる。 z 平面上の限られた領域の複素グリーン関数は (4) 式を使って

$$G(z; z_i) = -(1/2\pi) [\log \{ f(z) - f(z_i) \} - \log \{ f(z) - f(\bar{z}_i) \}] \quad (6)$$

となる。ここで \bar{z} は z の複素共役を意味する。

代用電荷法で利用するのは複素グリーン関数の実数部である。 $w = u + jv$ として (4) 式の $f(z)$ が実部と虚

部に分離できれば z 空間から w 空間への座標変換が陽に書き下すことができ、必要なグリーン関数がただちに得られる。

写像関数 $w = f(z)$ が実部と虚部に分離できない場合は FORTRAN プログラムに複素数演算を組み込み、実部のみを簡単に取り出すことができる。問題の幾何学的形によっては $z = g(w)$ の形でしか写像関数が得られない場合がある。この場合は 2 変数のニュートン-ラフソンの方法で逆関数を求めることができる。

3. 応用例

3.1 半無限長帯状領域

付録に示すとおり、半無限長帯状領域は $w = \sin\{(\pi/2a)z\}$ によって半無限空間に写像される。したがって半無限長帯状領域のグリーン関数は

$$G(x, y; x_i, y_i) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{(u - u_i)^2 + (v - v_i)^2}{(u - u_i)^2 + (v + v_i)^2} \quad (7)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y) = \cosh\{(\pi/2)y\} \sin\{(\pi/2)x\} \\ v &= f_2(x, y) = \sinh\{(\pi/2)y\} \cos\{(\pi/2)x\} \\ u_i &= f_1(x_i, y_i), \quad v_i = f_2(x_i, y_i) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

である。この形を見ると、有限領域のグリーン関数を利用する代用電荷法は、通常のグリーン関数 (7) 式の計算の前に (8) 式の座標変換の部分が加わるだけであることがわかる。グリーン関数 (7), (8) 式を利用する例題をあげよう。

3.1.1 解析解のわかっている例題

図 3 に示すような長方形領域の問題で 3 辺の電位がゼロ、残る 1 辺の上で $\cos\{(\pi/10)x\}$ の値をとるディリクレ問題である。通常の方法と有限領域のグリーン関数を利用する方法における極の配置を図 4 に示す。有限領域のグリーン関数は \oplus の記号を採用している。未知数の数が 30 から 5 に減少している。

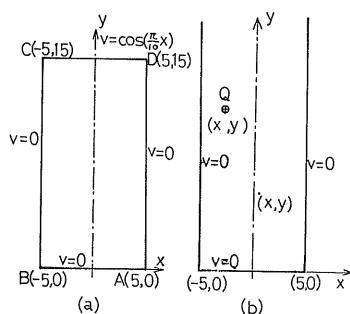


図 3 半無限長帯状領域の問題 1

Fig. 3 Problem in a strip of semi-infinite length.

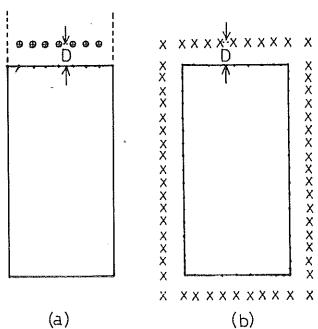


図 4 通常の代用電荷法と本方法における極の配置の比較
Fig. 4 Comparison of the locations of charges between the ordinary CSM and the present method.

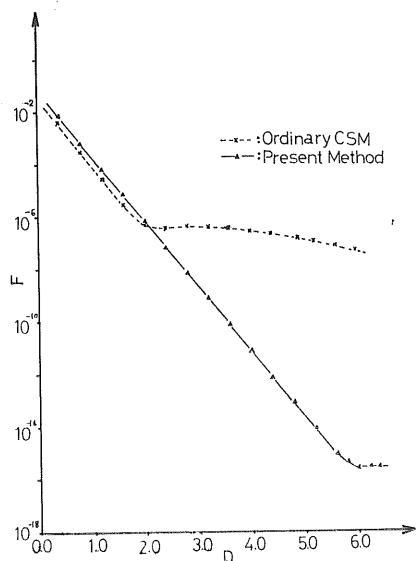


図 5 通常の代用電荷法と本方法の精度の比較
Fig. 5 Comparison of the error of ordinary CSM and the error of present method.

支配方程式は

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(x, y) = 0 \\ \phi(x, 0) = 0 \\ \phi(-5, y) = 0 \\ \phi(5, y) = 0 \\ \phi(x, 15) = \cos\{(\pi/10)x\} \end{array} \right\} \quad (9)$$

となる。 (9) 式の近似解は

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^N Q_i G(x, y; x_i, y_i) \quad (10)$$

と表わすが、この式は (9) 式中の五つの条件のうちいちばん下の条件のみ満たしていない。この問題の正解は

$$\phi(x, y) = \sinh\{(\pi/10)y\}/\sinh\{(3/2)\pi\} \cos\{(\pi/10)x\} \quad (11)$$

である。通常の代用電荷法との論文で示した方法で得た解の誤差評価 F の電荷位置による変化を図 5 に示す。誤差評価 F は境界上にとった検査点の誤差の 2 乗和の平方根である、すなわち

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^M \{\phi(x_i, y_i) - \psi(x_i, y_i)\}^2/M}$$

である。ここで (x_i, y_i) は検査点座標, M は検査点総数である。通常の方法の検査点は図 4 の長方形の四つの边上に配置したが、本論文で示した方法の検査点は上の一边上に配置した。他の辺上では誤差ゼロだからである。横軸は電荷の位置と境界との距離 D である。通常の代用電荷法では極の位置を境界から離していくと誤差は小さくなっていくが、あるところから飽和する。本論文で示した方法では直線的に誤差は小さくなっていく。

比較のため通常の方法と有限領域のグリーン関数を用いる方法の計算時間を示そう。

	通常の方法	本方法
未知数の数	30 個	5 個
座標変換 (拘束点と電荷点)	0 ms	10 ms
連立方程式の要素計算	340 //	13 //
// 求解 (ガウス消去法)	320 //	5 //
電荷量決定まで	660 //	28 //
任意の一点の電位の計算	12.4	4.2
// 座標変換	0	1.0

得られた解の精度が高いうえに、計算時間面での有利さは歴然としている。

3.1.2 導体チャネル内に平行に置かれた導体円柱

図 6 に示す問題は服部ら³⁾が通常の代用電荷法で解析を行なっているが、この問題はわれわれの方法の最適な応用例の一つである。この問題の支配方程式は

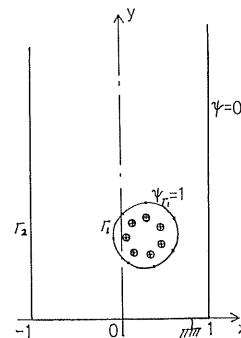


図 6 半無限長帯状領域の問題 2

Fig. 6 Problem of a strip region of semi-infinite length.

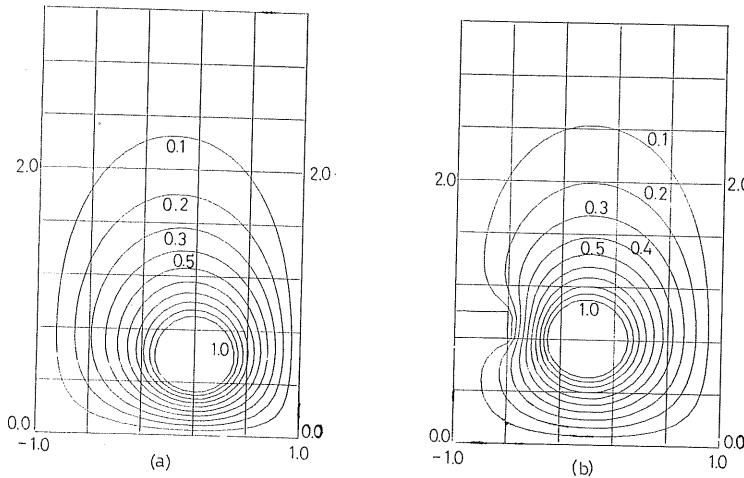


図 7 導体チャネル内の導体円柱のまわりの電位分布

Fig. 7 Potential distribution around a circular cylindrical conductor in conducting channel.

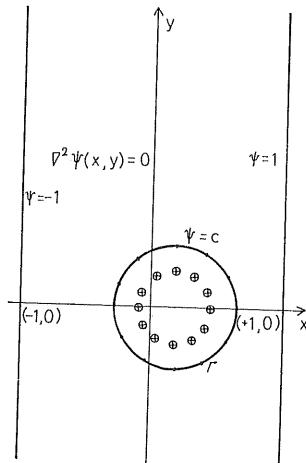


図 8 無限長帯状領域の問題

Fig. 8 Problem in a strip region of infinite length.

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \psi = 0 \\ \psi_{r_1}(x, y) = 1 \\ \psi_{r_2}(x, y) = 0 \end{array} \right\} \quad (12)$$

となる。外部導体 Γ_2 上の条件は解析的に満たされているので内部導体 Γ_1 上にだけ拘束点をとればよい。内部導体の半径を 0.6、電荷配置の径を 0.2、電荷数 $N=7$ の解析で、境界 Γ_1 上の最大誤差は 0.003 であった。図 7 (a), (b) に電位分布を示す。(a)は図 6 の場合の電位分布で、(b)は導体チャネル壁に矩形状の突起がある場合の電位分布である。突起がある場合は突起内に電荷数 21、円柱導体内には電荷数 7 を置いて解析を行なった。矩形状突起内の 21 個の電荷で突起境界上では最大誤差

1% の解析が実現できた。

3.2 無限長帯状領域の浮動ポテンシャルの問題

図 8 に示すように 2 枚の平行導体に電圧が加わり、内部の円柱導体の電位が浮動する場合の解析を行なう。

この場合の支配方程式は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y) &= 0 & (x, y) \in D \\ \psi(\pm 1, y) &= \pm 1 & (\text{複号同順}) \\ \psi_r(x, y) &= C & (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

である。ここで C は定数で、問題に応じて決定される。 $x = \pm 1$ でゼロになる無限長帯状領域のグリーン関数は

$$G(x, y; x_i, y_i) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{(u-u_i)^2 + (v-v_i)^2}{(u-u_i)^2 + (v+v_i)^2} \quad (7)'$$

ここで

$$\left. \begin{array}{l} u = f_3(x, y) = \exp\{-(\pi/2)y\} \sin\{(\pi/2)x\} \\ v = f_4(x, y) = \exp\{-(\pi/2)y\} \cos\{(\pi/2)x\} \\ u_i = f_3(x_i, y_i), \quad v_i = f_4(x_i, y_i) \end{array} \right\} \quad (14)$$

である。この問題では $x = \pm 1$ において ± 1 の値を取らねばならないので一般解を

$$\psi(x, y) = x + \sum_{i=1}^N Q_i G(x, y; x_i, y_i) \quad (15)$$

と表現する。この一般解は $\psi(\pm 1, y) = \pm 1$ (複号同順) を満たすので、内部の浮動電極上の条件を満たすだけでよい。

内部電極上での条件は C を定数として

$$x + \sum_{i=1}^N Q_i G(x, y; x_i, y_i) = C, \quad (x, y) \in \Gamma \quad (16)$$

と表わされる。内部電極 Γ 上の N 個の拘束点 (α_j, β_j)

表 1 種々の領域から半無限平面への変換

Table 1 Transformation of various field into semi-infinite plane.

	Shape of boundary	Transformation of coordinate
① Semi-infinite plane		$u=x$ $v=y$ $u_i=x_i$ $v_i=y_i$
② Strip region of infinite length		$u=-\exp\{-(\pi/2a)y\}\sin\{(\pi/2a)x\}$ $v=\exp\{-(\pi/2a)y\}\cos\{(\pi/2a)x\}$
③ Strip region of semi-infinite length		$u=\cosh\{(\pi/2a)y\}\sin\{(\pi/2a)x\}$ $v=\sinh\{(\pi/2a)y\}\cos\{(\pi/2a)x\}$
④ Angular region		$u=r^{\pi/\alpha}\cos\{(\theta/\alpha)\pi\}$ $v=r^{\pi/\alpha}\sin\{(\theta/\alpha)\pi\}$
⑤ Inner region of circle		$u=2ax/\{(a-y)^2+x^2\}$ $v=(a^2-y^2-x^2)/\{(a-y)^2+x^2\}$

で (16) 式を満たすとすると

$$\sum_{i=1}^N Q_i G(\alpha_j, \beta_j; x_i, y_i) - C = -\alpha_j, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (17)$$

となる。内部電極に前もって電荷がなかったとすればガウスの定理より

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0 \quad (18)$$

が成立する。 (17) および (18) 式を連立させて $N+1$ 個の未知数 $Q_1 \sim Q_N$ と C の値を決定する。この場合の連立方程式は $G_{ji}=G(\alpha_j, \beta_j; x_i, y_i)$ と略記すると次のようになる。

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} & -1 \\ G_{21} & G_{22} & & G_{2N} & -1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ G_{N1} & G_{N2} & & G_{NN} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \\ C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ 0 \end{vmatrix} \quad (19)$$

この場合、内部導体の半径 0.5、中心の位置 (0.25, 0) 電荷配置の径 0.15 (縮小率 $R=0.15/0.5=0.3$)、電荷数 $N=10$ で解析を行なった。最大誤差は 1.1×10^{-3} であった。

この解析では内部円の中心を通り、平行境界に直角な直線に関して対称であるが、この対称性は利用していない。

図 9 にポテンシャルの誤差分布を示す。この分布図は $N=7$ の場合で、真の解は $N=19$ の場合の解を採用した。条件は電荷数を除いて先の例と同様で、境界上の最大誤差は 1.5×10^{-2} 程度に落ちている。図 9 中の等高線の数字 +3, -4 は $+10^{-3}, -10^{-4}$ の値を意味する。つまり、10 というべきの底と、指数部のマイナスの符号を省略している。

平行境界上は解析的に条件を満足しているので誤差はゼロになっている。誤差は境界上で最大値をとり、境界から離れるにつれ、指數関数的に減衰する。

平行境界上の境界条件を通常の方法で満足させようとすると、多数の電荷と長い計算時間が必要であるうえ、その成果も満足できるものとはいい難い。

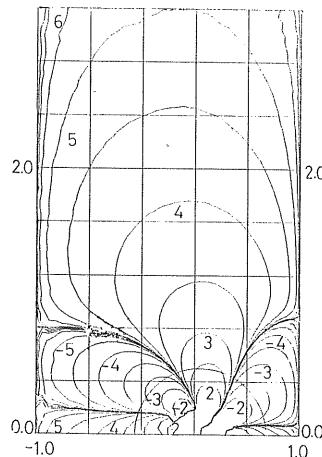


図 9 電位の誤差分布(無限長帯状領域の浮動ポテンシャル問題)

Fig. 9 Error distribution for the free potential problem in a strip region of infinite length.

4. 有限領域のグリーン関数の一覧表

有限領域のグリーン関数を導くのに時間がかかるようでは、使う気にならないであろう。簡単に導ける例を表の形に示しておく。

表 1 に示す各領域の座標変換を利用して、有限領域のグリーン関数を次のように表現する。

$$G(x, y; x_i, y_i) = -\frac{1}{4\pi} \log \left\{ \frac{r(u, v, u_i, v_i)}{r(u, v, u_i, -v_i)} \right\} \quad (20)$$

ここで

$$r(u, v, u_i, v_i) = (u - u_i)^2 + (v - v_i)^2 \quad (21)$$

である。(20) 式は第 1 種の境界条件の場合であるが、第 2 種の境界条件の場合は

$$\begin{aligned} G(x, y; x_i, y_i) \\ = -\frac{1}{4\pi} \log \{ r(u, v, u_i, v_i) \times r(u, v, u_i, -v_i) \} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。(22) 式をノイマン関数ともいうが、広い意味ではこれもグリーン関数となる。

第 2 種と第 1 種の境界条件が混合している場合でも、(20), (22) 式を修正して、同様の広義のグリーン関数を導くことができる。

5. ま と め

2 次元代用電荷法において未知数（代用電荷法）を等角写像を用いて減少させる組織的方法を提案した。

境界の一部すでに境界条件を満たしている関数を重ね合わせることにより、拘束点数ひいては電荷数を減少させる。この手法が適用できるのは境界の一部が有限領域のグリーン関数が簡単に求められるような境界から構成される場合である。いくつかの例題への適用法を示

し、役に立ちそうな有限領域のグリーン関数の一覧表も与えた。

ここで述べた手法は一般性があり、増田らが提案した「代用うず法」^{4,5)}あるいは著者が提案した「リーマン面を利用した代用電荷法」⁶⁾等においても利用できる。

この研究を遂行する際に協力された加藤三三男氏（松下電器）および青木泰宏氏に謝意を表します。

付 錄

[I] 半無限帯状領域

図 A-1 のように半無限帯状領域を半無限平面上に写像する関数はシュワルツ・クリストッフェル変換より

$$dz/dw = C/\sqrt{1-w^2} \quad (A-1)$$

と与えられる。書きなおすと

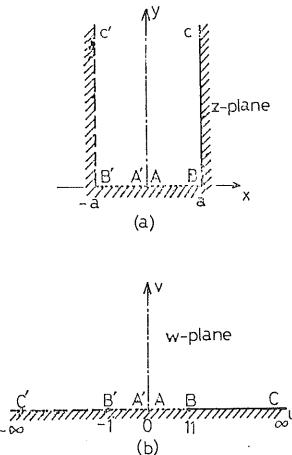


図 A-1 半無限長帯状領域

Fig. A-1 Strip region of semi-infinite length.

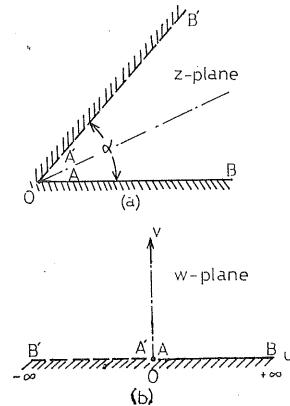


図 A-2 角領域

Fig. A-2 Angular region.

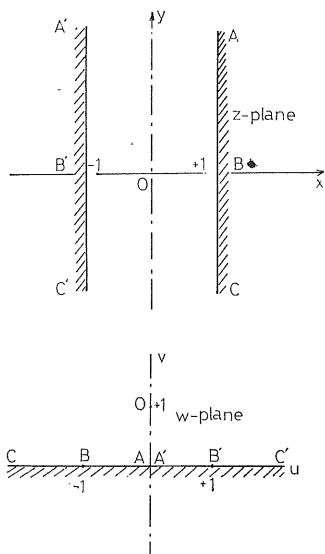


図 A-3 無限長帯状領域

Fig. A-3 Strip region of infinite length.

$$z = C \sin^{-1}(w) + C' \quad (\text{A-2})$$

が得られる。 $z=a$ と $w=1$, $z=-a$ と $w=-1$ が対応するように定数を決めると、 $C=2a/\pi$, $C'=0$ が得られる。したがって

$$w = \sin\{(\pi/2a)z\} \quad (\text{A-3})$$

となる。 $w=u+jv$, $z=x+jy$ とおき実部と虚部が等しいとおくと

$$\begin{aligned} u &= \sin\{(\pi/2a)x\} \cosh\{(\pi/2a)y\} \\ v &= \cos\{(\pi/2a)x\} \sinh\{(\pi/2a)y\} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

が得られる。

[II] 角領域

図 A-2 に示す角度 α の角領域を半無限平面に写像する関数は

$$w = z^{\pi/\alpha} \quad (\text{A-5})$$

である。 u, v と x, y の間の変換式は極座標 (r, θ) を使うと

$$\begin{cases} u = r^{\pi/\alpha} \cos\{(\pi/\alpha)\theta\} \\ v = r^{\pi/\alpha} \sin\{(\pi/\alpha)\theta\} \end{cases} \quad (\text{A-6})$$

となる。

[III] 無限長帯状領域

図 A-3 に示すように無限長帯状領域を半無限平面に写像する関数は

$$w = j \exp\{(\pi/2)zj\} \quad (\text{A-7})$$

である。 u, v, x, y の関係は

$$\begin{cases} u = -\exp\{-(\pi/2)y\} \sin\{(\pi/2)x\} \\ v = \exp\{-(\pi/2)y\} \cos\{(\pi/2)x\} \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

となる。

参考文献

- 1) 寺沢寛一: 数学概論, 応用編, 岩波書店 (1960)
- 2) 村島定行: 電気学会電力技術研究会資料 PE-79-3 (1979)
- 3) 服部一郎, 山本清一郎: 静電気学会誌, 2 (1978) 43
- 4) 増田閃一, 松本陽一: 電気学会論文誌A, 96 (1976) 1
- 5) 村島定行, 小野記久雄, 贊田 寛: 電気学会九州支部大会 (1981)
- 6) 村島定行, 久原秀夫: 情報処理, 21 (1980) 456