J. Inst. Electrostat. Jpn. 論 文

多流体モデルへ拡張された特性曲線法による放電解析

柴田 寿一*,1

(2019年3月4日受付;2019年5月27日受理)

Discharge Simulation Based on an Extended Method of Characteristics for a Multi-fluid Model

Hisaichi SHIBATA^{*,1}

(Received March 4, 2019; Accepted May 27, 2019)

Electroaerodynamic thrusters can propel by utilizing ionic wind generated with corona discharges, which have multi-scale nature both in spatial temporal directions, hence it is difficult and challenging to simulate. The method of characteristics is a kind of space-marching method to simulate such the discharge and characterized with lower computational costs compared with that of time-marching methods. So far, the method is only formulated under models excluding effects of electrons, and one of the biggest deficits is that it is impossible to determine corona onset voltage, hence current voltage characteristics, in closed form. To overcome the deficits, the method based on one-fluid models was extended with adopting a multi-fluid model in which the effects of electrons, hence Townsend mechanism are considered. The consideration of Townsend mechanism in the novel method enables self-consistent discharge simulation with holding the advantages of the space-marching method. The results obtained with the effects of electrons are neglected.

1. 序文

2018年に、マサチューセッツ工科大学(MIT)の研 究チームがコロナ放電により生じるイオン風を応用した 推進器(Electroaerodynamic thruster: EADT)を適用した 無人航空機の動力飛行に世界で初めて成功した¹⁾. EADTは、従来のドローンに適用されてきた電動モータ ーと比較し、40 dB 程度も静穏、かつ可動部が全く無い ので、将来、社会問題となり得る航空機の騒音問題を解 決できる可能性や、質的に新しい航空機を構成できる可 能性を持つ.

EADT はその曲率半径比が 30 を超えるような非対称性 の高い電極から構成される (図 1). 曲率半径の小さい

キーワード:特性曲線法,コロナ放電,電気流体力学, シミュレーション,イオン風

* 東京大学大学院新領域創成科学研究科先端エネルギー 工学専攻

(〒277-8561 千葉県柏市柏の葉 5-1-5)

Department of Advanced Energy, Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, 5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa-shi, Chiba, Japan

現) 宇宙航空研究開発機構宇宙科学研究所学際科学 研究系

(〒252-5210 神奈川県相模原市中央区由野台 3-1-1) Department of Interdisciplinary Space Science, Institute of Space and Astronautical Science, Japan Aerospace Exploration Agency, 3-1-1 Yoshinodai, Chuo-ku, Sagamihara-shi, Kanagawa, Japan

shibata@flab.isas.jaxa.jp



図1 EADT の仕組みとその多階層性

Fig.1 The mechanism of EADTs and its multiscale nature.

電極はエミッターと呼ばれ、大きい電極はコレクターと 呼ばれる.これら電極間に大気圧常温空気下で高電圧を 印加すると、エミッター電極を活性電極とするコロナ放 電が生じる.コロナ放電によりエミッター近傍で電離し たイオンはコレクターへと電場によりドリフト運動し、 空気中の中性粒子と衝突を繰り返す.この衝突により運 動量がイオンから空気へと伝達(イオン風の発生)され、 推進力が生み出される^{1,2}.

EADT の実用化を加速するためには、コロナ放電とそれに誘起されるイオン風現象の数値解析が有効であると考えられる.同じくコロナ放電を応用する電気集塵機の分野では、放電を記述する方程式系として、正イオンのみを考慮した1流体モデルがこれまで発展してきた³⁻⁵.

しかし,電子を考慮しない1流体モデルでは電子衝突 電離反応(α効果)とカソードからの2次電子放出(γ 効果),すなわち Townsend 機構,を考慮できない.この ことから,放電持続条件を指定できる境界条件が別途必要となる.典型的な境界条件として,放電開始後にコロ ナ活性電極表面の電界が一定値に維持されるとする経験 則(Kaptsovの仮説)をPeekの式などのコロナ放電開 始電界の経験式と組み合わせたものを挙げられる.しか し,EADTのように電極形状が複雑な場合は,コロナ放 電開始電界の経験式が存在しない場合がある.加え,放 電領域の非対称性が強い場合はKaptsovの仮説による近 似に問題が生じる可能性がある.

これら問題の解決策の一つとして,電子の効果を流体 モデルに組み入れる手法を挙げられる(例えば,2流体 モデルの導入). そのようなモデルでは,α効果とγ効果, すなわち Townsend 機構,を閉じた形で再現できる.基 本的に電極形状に依存しない,電子衝突電離係数と二次 電子放出係数が判明すれば,前述の仮説と経験式に依存 しない,より基本原理に立ち返った解析が可能となる.

ところが、2流体モデルを採用した EADT の解析にお いては、方程式系に大きく乖離する複数の時間スケール が含まれることが知られている^{6,7)}.例えば大気圧雰囲 気下において、電子衝突電離反応はナノからマイクロ秒 単位で生じるが、正イオンはミリ秒から秒単位で電極間 をドリフト運動する.このため、2流体モデルに時間進 行法を適用し EADT の問題を解く場合には、定常ソル バーを用いない限り、100万回程度かそれ以上の時間積 分回数が要求される.この時間積分を多次元問題におい て実行することは、計算コストの面から現実的でない場 合が多い.このことから、2流体モデルの高速解法を確 立することが望まれる.

これまで筆者らは、2流体モデルの高速解法を摂動法 によって構成してきた⁸⁻¹¹⁾.先行研究では、放電開始電 圧近傍の電流電圧特性を把握するため.摂動法を基に手 法を構築した.しかし、Monrolinらによって指摘¹²⁾さ れたように、低次の摂動法に基づく限り、空間電荷効果 を容易に無視できない非線形領域への応用は難しい.

そこで本研究では、空間進行法の一種であり、かつ非摂 動的手法である特性曲線法による定式化に注目する.特性 曲線法は、計算コストが時間進行法と比較し小さく、これ まで電気集塵機の分野で主に適用されてきた^{3,4)}が、筆者 の知る限り、電子の効果を組み入れた多流体モデルへの適 用例はない.本研究では、これまで正イオンのみを考慮し た1流体モデルで定式化されてきた特性曲線法を電子と正 イオンを考慮した2流体モデルでの定式化へと拡張する.

2. 特性曲線法のレビュー

これまで,特性曲線法 (Method of Characteristics: MoC)

においては、電子の効果を無視し、正イオンのみを考慮 したモデルが構築されてきた. それらモデルでは、 Townsend 機構を直接に再現することはできない. 本節 では、その特性曲線法を簡単にレビューし、電子の影響 を考慮した場合への拡張へ向けて準備する.

2.1 支配方程式

正イオンのドリフト方程式(1流体モデル)は以下で 与えられる:

$$\nabla \left(\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{p}} \mathbf{E} \right) = 0 \tag{1}$$

ここに μ_p は正イオン移動度, ρ_p は正イオン密度, E は電場ベクトルである. 正イオン密度のみを考慮した Poisson 方程式は以下で与えられる:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_p}{\epsilon_0} \tag{2}$$

ここに ϕ はスカラ電位. ϵ₀ (= 8.8×10⁻¹⁴ F/cm) は真空 の誘電率である.

2.2 特性曲線法の導出

座標tを正イオンがドリフト運動する方向に取ると, 以下の式を得る:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mu_{\rm p} \mathbf{E} \tag{3}$$

ここにxは位置座標である.式(3)を式(1)へと代入し, 連鎖則による関係式

$$\nabla \left(\rho_p \mu_p \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d(\rho_p \mu_p)}{dt} \tag{4}$$

を利用すると,

$$\frac{d(\rho_p \mu_p)}{dt} = -\frac{\mu_p^2}{\varepsilon_0} \rho_p^2 \tag{5}$$

を得る. さらに移動度を一定と近似すれば,

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{0}}}\rho_{\mathrm{p}}^{2} \tag{6}$$

を得る. もし,境界条件としてコロナ活性電極表面(こ こではアノード電極)での正イオン密度 ρ_{panode} が与えら れれば,式(6)は

$$\frac{1}{\rho_p} = \frac{1}{\rho_{p,anode}} + \frac{\mu_p t}{\epsilon_0} \tag{7}$$

と解析的に解くことができる. その境界での正イオン密 度の代表的な与え方は, コロナ活性電極表面の電界が放 電開始後も維持されると主張する経験則, つまり Kaptsovの仮説, を応用することである. しかし, その 場合は放電開始電界を Peek の経験式, あるいは実測値 などから決定する必要が生じる^{3,4)}.

2.3 計算アルゴリズム

Kaptsovの仮説を採用し、かつコロナ放電開始電界を経

験式から求める場合,具体的な計算アルゴリズムは以下の ようになる.なお,本研究で提示する結果はここで解説す るパラメータと手法を採用して得られたものである:

- 1. 各電極における電位を設定
- 2. アノード電極における正イオン密度を初期値に設定
- 3. 正イオン密度の修正量が許容量以下になるまで、以 下を反復
- 3-(a). 電荷方程式 (式(7)) を求解
- 3-(b). Poisson 方程式 (式(2)) の右辺に求解した電荷 を設定
- 3-(c). Poisson 方程式を全空間で解き、電場を求解
- 3-(d). アノード電極表面における正イオン密度の修正 量を決定し,修正

以下,アルゴリズムの要点を説明する.まず1.につ いて、電位は放電開始電圧を超えている必要がある、次 に、2.について、アノード電極における正イオン密度の 初期値は現実的な値(例えば、10⁶ cm⁻³)を設定する. 3. の収束判定ついて、本研究では、修正量と修正される べき正イオン密度との比率が10°以下になるときにルー プを打ち切ると約束する. 3-(a)は単純な代数計算であ る. 3-(b)について,座標tとxの座標変換を行いながら. MoC で用いる格子から Poisson 方程式で用いる格子へと 物理量を補間する. 3-(c)について, 具体的には有限差 分法で Poisson 方程式を空間離散化し、離散化された線 形方程式を定常反復法の一種である SOR 法(緩和係数 を 1.8 とする) で解くことができる. 3-(d) について, 任 意の特性曲線において、コロナ活性電極表面の電場がコ ロナ放電開始電界に保たれるように,任意の特性曲線に 沿って

$$\rho_{\text{p,anode}} \leftarrow \rho_{\text{p,anode}} + \omega \cdot (E_{\text{anode}} - E_{\text{on}}) \tag{8}$$

と更新する. ここにω (=1×10¹⁵) は緩和係数, E_{on} は コロナ放電開始電界であり実測値から決定する. E_{anode} は コロナ活性電極表面での電場強さである. ここで, コロ ナ活性電極表面 (アノード電極) における正イオン密度 が上昇すると, アノード電極表面における電場強度は緩 和され, E_{anode} の値は減少する. このことから, 意味のあ るフィードバック・ループを構成するためには, ωを正 値に設定する必要がある.

3. 特性曲線法の拡張

前節では、1流体モデルに特化した特性曲線法の導出 にあたり、電子を無視した.本節では、電子の効果(α, γ効果)を考慮できる2流体モデルに対応する特性曲線 法を導く.

3.1 支配方程式

局所場近似(Local Field Approximation: LFA)が成立 すること、及び荷電粒子の拡散を十分に無視できること を要請し、以下の電子と正イオン密度の輸送方程式をス カラ電位に関する Poisson 方程式と組み合わせて採用す る⁶¹¹⁾:

$$-\nabla \cdot (\mu_e \rho_e \mathbf{E}) = \mathbf{S},\tag{9}$$

$$\nabla \cdot \left(\mu_{\rm p} \rho_{\rm p} E\right) = \mathbf{S},\tag{10}$$

$$\mathbf{S} = |\mathbf{\mu}_{\mathbf{e}} \mathbf{E}| \boldsymbol{\alpha}(|\mathbf{E}|) \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{e}},\tag{11}$$

$$\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \left(\rho_p - \rho_e \right), \tag{12}$$

ここで ρ_e は電子密度, μ_e は電子移動度, α は電子衝突 電離係数であり電場強さの関数である.

先行研究⁶¹¹⁾にならい,境界条件は以下で与える.ア ノード電極では正イオン密度がゼロであることを要請する:

$$\rho_p = 0 \tag{13}$$

カソード電極で二次電子放出を考慮する:

$$\rho_{\rm e} = \gamma \mu \rho_{\rm p}, \tag{14}$$

ここで γ は二次電子放出係数, $\mu = \frac{\mu}{\mu_e}$ は移動度比である.

3.2 特性曲線法の導出

まず,電子密度が特性曲線上で従う式を求める.式(9) の左辺を,式(3)及び式(12)を代入し変形する:

$$-\left[\nabla(\mu_{e}\rho_{e}) \cdot \mathbf{E} + \mu_{e}\rho_{e}\nabla \cdot \mathbf{E}\right]$$

$$= -\left[\frac{d(\mu_{e}\rho_{e})}{dt} \cdot \frac{1}{\mu_{p}} + \mu_{e}\rho_{e}\nabla \cdot \mathbf{E}\right]$$

$$= -\frac{d(\mu_{e}\rho_{e})}{dt} \cdot \frac{1}{\mu_{p}} - \frac{\mu_{e}}{\epsilon_{0}}\rho_{e}(\rho_{p} - \rho_{e}).$$

$$\Box \mathcal{H} \downarrow \mathcal{H},$$

$$\frac{d(\mu_{e}\rho_{e})}{dt} = -\mu_{p}\mathbf{S} - \frac{\mu_{p}\mu_{e}}{\epsilon_{0}}\rho_{e}(\rho_{p} - \rho_{e}) \qquad (15)$$

を得る.

次に,正イオン密度が特性曲線上で従う式を求める. このため,電子の場合と同様に,式(10)の左辺を変形する:

$$\begin{split} &= \nabla (\mu_p \rho_p) \cdot E + \mu_p \rho_p \nabla \cdot E \\ &= \frac{d(\mu_p \rho_p)}{dt} \cdot \frac{1}{\mu_p} + \mu_p \rho_p \nabla \cdot E \\ &= \frac{d(\mu_p \rho_p)}{dt} \cdot \frac{1}{\mu_p} + \frac{\mu_p}{\varepsilon_0} \rho_p (\rho_p - \rho_e) \end{split}$$

これより,

$$\frac{d(\mu_p \rho_p)}{dt} = \mu_p \mathbf{S} - \frac{\mu_{p^2}}{\epsilon_0} \rho_p \left(\rho_p - \rho_e\right) \tag{16}$$

を得る.

次に, μ_eρ_e := x_e及びμ_pρ_p := x_pと定義し,式(15)と式(16) に代入した方程式群,

$$\frac{d\mathbf{x}_{e}}{dt} = -\mu_{p}\mathbf{S} - \frac{\mu_{p}}{c_{0}}\mathbf{x}_{e}\left(\frac{\mathbf{x}_{p}}{\mu_{p}} - \frac{\mathbf{x}_{e}}{\mu_{e}}\right),\tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\mathbf{t}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p}} \mathbf{S} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p}}}{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathrm{0}}} \mathbf{x}_{\mathrm{p}} \left(\frac{\mathbf{x}_{\mathrm{p}}}{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{p}}} - \frac{\mathbf{x}_{\mathrm{e}}}{\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{e}}} \right), \tag{18}$$

$$\mathbf{S} = |\mathbf{E}|\alpha(|\mathbf{E}|)\mathbf{x}_{e},\tag{19}$$

を解く.アノード電極における境界条件(式(13))を用 い式(17)-(19)を非斉次1階線形常微分方程式の解法に 従って手計算で同値変形すると,

$$\mathbf{x}_{e} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{K}}{\epsilon_0 (\mathbf{x}_{e})^{-1}_{anode} + t - \int^t (1+\mu) \mathcal{K} dt},$$
(20)

$$\mathbf{x}_{\mathbf{p}} = \frac{\varepsilon_0 (1-\mathcal{K})}{\varepsilon_0 (\mathbf{x}_{\mathbf{e}})^{-1} \underset{\text{anode}}{\text{anode}} + t - \int^t (1+\mu) \mathcal{K} dt},$$
(21)

$$\mathcal{K} = \exp\left[-\int^{t} \mu_{p} |\mathbf{E}| \alpha(|\mathbf{E}|) dt\right]$$
(22)

を得る.式(20)-(22)を式(17)-(19)へと代入すると, 解の妥当性を確認できる.これに加え,カソード電極に おける境界条件である式(14)を利用すると,持続放電の 条件式

$$\mathcal{K}(t = t_c) = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \tag{23}$$

を導出できる.

式(23)は次節で述べる2流体モデルによる計算アルゴ リズムの中で修正量の決定に用いられ、1流体モデルに よる計算アルゴリズムに適用される Kaptsov の仮説に対 応する.

なお,式(23)を Laplace 場に適用すると,初期の放電 経路を表す特性曲線が事前に分かる場合に限り,放電開 始電圧と二次電子放出係数を関連付けられる¹³⁾.

3.3 計算アルゴリズム

拡張された特性曲線法(Ex-MoC)により定式化され た方程式群,式(20)-(22)は積分を含む代数方程式であ るが,元の偏微分方程式群,式(9)-(11)と比べ容易に 解ける.この事実は3次元空間で定義された偏微分方程 式の計算を1次元空間で定義された代数方程式に変換で きることを意味しており,特に3次元の実問題において 計算量の削減に貢献できると考えられる.ここに,冒頭 で述べたように,少なくとも EADT の解析に用いられ る2流体モデルは,一般に硬い(Stiff な)方程式であり, 1流体モデルと比較しその求解に膨大な計算量を要求す ることに留意されたい. 一方, 楕円型の偏微分方程式である Poisson 方程式(式

(12))は Deutsch の仮定¹⁴ などの特別な仮定を置かない
 限り、計算量の削減が困難である。このことから、MoC
 及び Ex-MoC の計算量は、Poisson 方程式の評価回数に
 おおよそ比例すると考えられる。

具体的な Ex-MoC の計算アルゴリズムは以下の通りである:

1. 各電極における電位を設定

- 2. アノード電極における電子密度を初期値に設定
- 3. 電子密度の修正量が許容量以下になるまで,以下を 反復

3-(a). 電荷方程式 (式(20)-(22)) を求解

- 3-(b). Poisson 方程式(式(12))の右辺に求解した電荷 を設定
- 3-(c). Poisson 方程式を全空間で解き、電場を求める
- 3-(d). アノード電極における電子密度の修正量の決定 と修正

以下,アルゴリズムの要点を説明する.まず1.について,電位は放電開始電圧を超えている必要がある.2. について,アノード電極における電子密度の初期値は現 実的な値(例えば,10⁶ [cm³])を設定する.3.について, 修正量と修正されるべき電子密度との比率が10⁻¹²以下に なるときにループを打ち切ると約束する.3-(a)につい

て,積分は $(1 + \mu)$ %及び $\frac{d \Re}{dt}$ の 2 つの量に対して実行す

る. 3-(b)について,電荷方程式(式(20)-(22))の解 は電荷密度ではない点に留意して計算する. 3-(c)につ いて,具体的には有限差分法や有限要素法などの空間離 散化が適用できる. 3-(d)について,修正量の決定と修 正は以下の式で行う.カソード電極における二次電子放 出を表す境界条件が任意の特性曲線で満たされるよう に,各特性曲線に沿って,

$$\rho_{e,anode} \leftarrow \rho_{e,anode} - \omega \cdot \left(\mathcal{K} \left(t = t_c \right) - \frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)$$
(24)

と更新する. ここにω (=1×10⁻¹³) は緩和係数である.

ここで,アノード電極における電子密度が上昇すると, アノード電極表面における電場強度は緩和され, の値 が増大すると考えられる.このことから,意味のあるフ ィードバック・ループを構成するためには,ωを正値に 設定する必要がある.

4. 問題設定

拡張された特性曲線法(Ex-MoC)の検証を,1流体 モデル,2流体モデルによる数値解析結果,そして実験 データが存在する先行研究¹⁵にならい,大気圧常温空 気下(298 K)における同軸円環電極間に生じる正コロ ナ放電で実行する.ここでは簡単化のために対称性の高 い電極形状を選択するが, Ex-MoC は任意形状電極間に 生じるコロナ放電を扱えるように定式化されていること に留意されたい.

4.1 計算パラメータの設定

先行研究¹⁵⁾ にならい,輸送係数を以下のように設定 する.電子移動度を 5.00×10² m²V⁻¹s⁻¹,正イオン移動度 を 1.86×10⁴ m²V⁻¹s⁻¹,電子衝突電離係数を電場強さの関

数として, $\alpha(|\mathbf{E}|) = 7.20 \times 10^5 \exp\left(-\frac{2.09 \times 10^7}{|\mathbf{E}|}\right) \, \mathrm{m}^{-1}$ と設定す

る. ここに電場強さ |E| の単位は V/m である. 2流体モ デルでパラメータとなる二次電子放出係数(γ) は, 1 流体モデルと可能な限りフェアに予測性能を比較するた め,実験から得られた放電開始電圧を再現できるように 逆算し,4.0×10³と設定する.また,同軸円環電極の形 状は内径 0.07 cm,外径 10.35 cm である.本研究では, 実験で適用された 3 次元構造の電極形状を 1 次元軸対称 のそれに帰着させて解く.

4.2 計算格子の設定

アノード電極及びカソード電極近傍で格子が密になる 不等間隔格子を採用する. 1流体モデルでは、シースを 解像する必要がない.しかし、2流体モデルでは、精度 よく計算を実行するためには、シースを解像する必要が ある. ここにデバイ長さは、電子温度を1 eV, コロナ 活性電極表面近傍での電子密度を10⁷ cm⁻³と見積もると, 220 µm のオーダーである. このことから, 22 µm 程度 の格子分解能が必要と考えられる.本研究では、この事 実,そして格子収束性を考慮しながら節点数を検討し, 1流体モデル及び2流体モデルの両者において、収束性 が十分に確認できた 2,000 節点と設定し、最小格子幅は 共に安全側で約1 µm と設定した.一般に、シースを解 像する必要がない観点から、1流体モデルで用いる格子 は2流体モデルのそれより粗くとれると考えられる.し かし、本研究における問題設定においては、コロナ活性 電極近傍の急峻な電場分布を精度よく解像する観点か ら、このシースを解像するために必要な格子と同程度の 幅の格子が双方のモデルで必要になるので、注意が必要 である.

座標系は動径方向にrを取る.ここに座標tと座標r との関係は

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mu_{\mathrm{p}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{25}$$

であり、計算過程で利用する.

5. 結果及び議論

本節では, Ex-MoC (ここでは2流体モデル)の結果を 示し, MoC (従来の1流体モデル)の結果と比較検討する.

5.1 2流体モデルの結果

印加電圧を 40 kV に設定し, Ex-MoC でのシミュレー ションを実行した.図2 にシミュレーションで得られた 電荷密度分布を示す.電子密度は、コロナ活性電極(ア ノード)近傍では正イオン密度に比べて優勢であるが, カソードに近づくにつれて急速に減衰する.一方,正イ オン密度は、アノードではゼロであるが、その後極大値 を取った後、カソードに近づくにつれて減衰する.カソ ードでの正イオン密度は電子密度の約10万倍である. これは移動度比(µ)と二次電子放出係数(γ)の積と 同じオーダーであり、境界条件(式(14))と一貫した結 果が得られている.



図 2 Ex-MoC により得られた電荷密度分布 Fig.2 Distribution of charge densities obtained by Ex-MoC.

5.2 1流体モデル、2流体モデル、実験結果の比較

印加電圧を40 kV に設定した場合の空間電荷分布及び 電場分布を比較検討する.図3に1流体モデル(MoC) 及び2流体モデル(Ex-MoC)を用いて計算した正イオ ン分布の結果を示す.カソード電極近傍では、物理量分 布が定性的に一致しているため、結果は類似したものに なると考えられる.しかし、電子を陽に考慮したので、 アノード電極近傍で両者の分布は大きく乖離している. 図4に1流体モデル及び2流体モデルを用いて計算され た電場を示す.両者モデルにおける電場の計算結果はよ い一致を見ている.1流体モデルと2流体モデルにおけ る放電現象のモデル化はシース領域の考慮の有無を含め 大きく異なるが、類似する電場分布が得られることは注 目に値する.電流密度の比較結果を図5に示す.1流体 モデル、2流体モデルの相対誤差は30 kV から 50 kV の



図 3 MoC 及び Ex-MoC から計算された正イオン密度の分布 Fig.3 Distribution of positive ion density obtained with MoC and Ex-MoC.



図 4 MoC 及び Ex-MoC から計算された電場の分布 Fig.4 Distribution of electric field obtained with MoC and Ex-MoC.



図5 実験, MoC, 及び Ex-MoC で得られた電流電圧特性 Fig.5 Current-Voltage Characteristics obtained with the experiments, MoC, and Ex-MoC.

区間では2%以内である.加え,実験データともよい一 致を見ている.

5.3 イオン風現象の予測精度

イオン風を駆動する体積力(クーロン力)を以下の式¹⁰ で計算し、その空間分布を図6に示す。

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{p}} - \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{e}}) \cdot \mathbf{E} \tag{26}$$

コロナ活性電極の半径の2倍程度までの領域において は、1流体モデルで得られる体積力が2流体モデルのそ れを上回る.一方、計算空間の大部分を占めるそれ以外 の領域においては、両者の結果は定量的に一致している. このことから、本研究で扱った問題に限れば、体積力予 測に1流体モデルを用いても問題がないと考えられる.



図 6 体積力分布のモデルによる比較 Fig.6 Comparison of body force distribution between the different models.

5.4 計算コスト

図7に、収束までに要したSOR反復回数の総計を示す. 多くの場合で、1流体モデルと比較して2流体モデルで は収束までに多くの反復回数を要するが、アノードにお ける電子密度の初期値が収束値に近い場合は、直ちに収 束することが分かる.

陽解法による時間進行法で本問題を解いた場合,1流 体モデルにおいては,正イオンがギャップd~0.1 mの 電極間をドリフト速度 $v_{p}\sim10^{3}$ m/s で移動する時間尺度 τ_{dp} はおおよそ $\tau_{dp}\approx dv_{p}\approx 0.1/10^{3}=100 \ \mu s$ である.空間格子 幅 $\Delta x = 1 \ \mu m$, CFL 数を 0.1 と設定すれば,時間刻み幅 の最大値は $\Delta t = CFL \cdot \Delta x / v_{p} \approx 100 \ p s$ と概算できる.この ため、少なくとも 100万回の時間積分が必要と考えられ る.一方、2流体モデルの場合は電子ドリフト現象を含 むので、さらに制約が厳しくなる.本研究では、電子の 移動度は正イオンのそれの約 300倍であるので、CFL 条 件から少なくとも 3億回の時間進行が必要と考えられ る.また、Poisson 方程式ソルバーの呼び出し回数は、1 流体モデルの場合と比較して約 300倍となり、その呼び 出し回数の下限は 3億回と概算できる.



図7 全 SOR 反復回数のモデルによる比較

Fig.7 Comparison of the total number of SOR iteration between the different models.

6. 結論

正イオンのみが考慮される従来の特性曲線法を拡張 し,正イオンに加えて電子の影響を考慮できる新しい特 性曲線法を定式化した.同軸円環電極内部に生じるコロ ナ放電を対象に,正イオンのみを考慮した従来の特性曲 線法 (MoC),および電子も考慮できる特性曲線法 (Ex-MoC) での予測結果を比較検討した.これにより,以 下の知見を得た.

- ・Ex-MoC では最終的に 2本の常微分方程式が得られ, これらは MoC と同じく解析的に解ける.
- ・Ex-MoCを用いた数値解析により,少なくとも本研究 で扱った条件下では,電流予測に際し,実験結果をよ く説明できることが分かった.
- ・カソード電極近傍での正イオン密度の空間分布について、MoCとEx-MoCによる解析結果の間で定性的な差異は見受けられない。しかし、コロナ活性電極近傍におけるその分布は大きく異なる。
- Ex-MoC と MoC の間で、電場分布は大局的によい一 致を見た。
- ・Poisson 方程式ソルバーに含まれる SOR 反復ルーチンの呼び出し回数を基準として考えた場合,特性曲線法かつ2流体モデル(Ex-MoC)は特性曲線法かつ1流体モデル(MoC)と比較してより高い計算コストを要する.一方,時間進行法かつ2流体モデルの計算コストは,時間進行法かつ1流体モデルのそれと比較し,電子移動度を正イオン移動度で除算した程度,つまり少なくとも約300倍の計算コストを要する.

今後は以下に挙げる研究を遂行する計画である.

・少なくとも定式化の観点からは、電極形状を制限して いないので、Ex-MoC は MoC と同じく任意形状電極 間の放電解析に応用できると考えられる. このことか ら、より複雑な電極でのベンチマークを行う.

・本研究では、Ex-MoCを正イオンと電子を考慮した2
 流体モデルで定式化したが、応用先を広げるため、負
 イオンや準安定種などを加えた定式化を試みる。

謝辞

本研究を遂行する機会を与えてくださった,東京大学 の鈴木宏二郎教授に感謝いたします.

参考文献

- H. Xu, Y. He, K. L. Strobel, C. K. Gilmore, S. P. Kelley, C. C. Hennick, and S. R. H. Barrett: Flight of an aeroplane with solid-state propulsion. Nature, 563 (2018) 532
- 2) F. Plouraboué: Flying with ionic wind. Nature, **563** (2018) 476
- K. Adamiak: Numerical models in simulating wire-plate electrostatic precipitators: a review. J. Electrostat., 71 (2013), 673
- K. Adamiak and P. Atten: Simulation of corona discharge in point-plane configuration. J. Electrostat., 61 (2004) 85
- 5) 伊藤航平,森 悠真,瑞慶覧章朝,川田吉弘,田岡智浩, 柴田憲司:線対平板型電気集塵機におけるイオン風の解 析と測定.静電気学会誌, **43** (2019) 25
- U. Ebert, C. Montijn, T. M. Briels, W. Hundsdorfer, B. Meulenbroek, A. Rocco, and van E. M. Veldhuizen: The multiscale nature of streamers. Plasma Sources Sci. Technol., 15 (2006) S118
- S. T. Surzhikov, and J. S. Shang: Two-component plasma model for two-dimensional glow discharge in magnetic field. J. Comput. Phys., **199** (2004) 437
- H. Shibata: Electric breakdown detection of gases based on global linear stability analysis. University of Tokyo Ph.D. thesis (2016)
- H. Shibata, Y. Ohmichi, Y. Watanabe, and K. Suzuki: Global stability analysis method to numerically predict precursor of breakdown voltage. Plasma Sources Sci. Technol. 24 (2015) 055014
- H. Shibata, Y. Watanabe, and K. Suzuki: Performance prediction of electrohydrodynamic thrusters by the perturbation method. Phys. Plasmas, 23 (2016) 053512
- H. Shibata and R. Takaki: A novel method to predict current voltage characteristics of positive corona discharges based on a perturbation technique. I. Local analysis. AIP Adv., 7 (2017) 115026
- 12) N. Monrolin, O. Praud, and F. Plouraboué: Revisiting the positive DC corona discharge theory: Beyond Peek's and Townsend's law. Phys. Plasmas, 25 (2018) 063503
- L. K. Warne, and R. E. Jorgenson: Ionization Coefficient Approach to Modeling Breakdown in Nonuniform Geometries. SANDIA Report (2003) SAND 2003-4078
- A. Bouziane, K. Hidaka, M. C. Taplamacioglu, and R. T. Waters: Assessment of corona models based on the Deutsch approximation. J. Phys. D: Appl. Phys., 27 (1994) 320
- Y. Zheng, Bo. Zhang, and J. He: Current-voltage characteristics of dc corona discharges in air between coaxial cylinders. Phys. Plasmas 22 (2015) 023501