

論 文

代用電荷法のポアソン方程式への応用

村島 定行*

(1979年5月16日受理)

Applications of the Substitute Charge Method to
Poisson's Equation

S. MURASHIMA*

(Received May 16, 1979)

The substitute charge method introduced by H. Steinbigler in 1969 is considered to be a simple and effective method to solve Laplace's equation and well used in the research of high field phenomena. It is, however, essentially difficult to solve Poisson's field because it is a super-position method of Laplace's field. In this paper, it is pointed out that if a particular solution of the Poisson's equation is obtained analytically, numerically or so, the Poisson's equation can be reduced to a Laplace's equation by inculding the effect of space charge into the boundary condition and this Laplace's equation can be solved easily by the ordinary technique of the substitute charge method. In order to verify this technique, a current field problem in two dimensions and a problem of an axi-symmetric oil tank partly filled with charged liquid are treated. The result are satisfactory in computing time and accuracy.

1. まえがき

代用電荷法¹⁾はラプラス方程式の簡便な解法として珍重され、高電圧現象の研究分野では不可欠の解析手法として定着しつつある²⁻⁴⁾。高精度が簡単に得られ、誤差が境界上で最大となるので境界条件と比較するだけで最大誤差を知ることができる⁵⁾。離散化法ではないので任意の点の電位、電界を直接（数値微分、数値補間などをせずに）求めることができるなどの長所があり、今後広く使われることと思う。

しかし、この方法は今までのところラプラス方程式にしか適用されたことがなく、空間電荷伝導等と関連してポアソン方程式への適用法の開発が望まれている⁷⁾。

この論文ではそれに対する一つの解答としてポアソン方程式の特解と一般解を重ね合わせて、ラプラス方程式を導き、これを通常の代用電荷法で解く方法を示す。一般にポアソン方程式に適用しようと試みると、空間電荷を代用電荷群で模擬することを最初に思いつく。しかしこの方法は原理的に問題があり、誤差が大きくなる可能性がある。本論文では特解を解析的に求め、代用電荷は一般解を表現するのに限定した。

2. ポアソン方程式への代用電荷法の適用

この節では、ポアソン式をラプラス式に帰着させるよく知られた手法⁶⁾を示す。ラプラス方程式であれば代用電荷法で効率よく、精度よく解ける。

まず図1に示す領域 D に対するディリクレ型のポアソン方程式を考える。便宜上2次元問題として定式化する。

$$\begin{cases} \nabla^2\phi(x, y) = -\rho(x, y)/\epsilon, & (x, y) \in D \\ \phi(x, y)|_{\Gamma} = f(s), & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

ここで ϵ は領域内の誘電率であり、 $e(x, y)$ は電荷分布である。 $f(s)$ は境界上の点 s における境界値を与える関数である。(1)式の解を特解 $s(x, y)$ と一般解 $\phi(x, y)$ の和としてあらわす。

$$\phi(x, y) = s(x, y) + \psi(x, y) \quad (2)$$

ここで特解 $s(x, y)$ は

$$\nabla^2s(x, y) = -\rho(x, y)/\epsilon \quad (3)$$

を満たしている。

(2)式を(1)式に代入すると一般解 $\psi(x, y)$ に関する次のラプラス方程式を得る。

$$\begin{cases} \nabla^2\psi(x, y) = 0 & (x, y) \in D \\ \psi(x, y)|_{\Gamma} = f(s) - s(x, y)|_{\Gamma} & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (4)$$

特解 $s(x, y)$ が既知ならば、ラプラス方程式(4)式を解いて一般解 $\psi(x, y)$ を求めれば、(2)式からポアソン方程式の解が得られる。

* 鹿児島大学工学部電子工学科 (890 鹿児島市郡元 1)
Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Kagoshima University, 1, Kohrimoto, Kagoshima 890, Japan

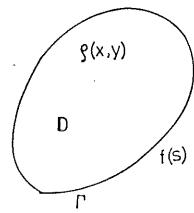


図1 ポアソン問題

Fig. 1 Poisson's problem of Dirichlet type

つまり空間電荷の境界値に及ぼす影響を境界条件にくり込んで、一般解に関するラプラス方程式を導き、これを代用電荷法で解けばよい。

特解を求めるることは境界条件を満足する必要がないので非常に楽である。解析的に特解が得られる場合も少くないし、数値積分を効果的に行なう方法も可能である。特解に調和関数を加えたものも特解があるので特解は無数に存在しているといえる。どの特解を用いるかは計算精度にかなり影響するが得られる解は同じものである。

3. 解析的な特解が得られる例

3.1 2次元の電流場の問題

図2に示すように導電率 σ の半導体薄膜に2点で $\pm I$ の電流が流れ込んでいる場合⁸⁾、次のポアソン方程式が成り立つ。

$$\nabla^2\psi(x, y) = (I/\sigma) \{ \delta(x-x_+) \delta(y-y_+) - \delta(x-x_-) \delta(y-y_-) \} \quad (x, y) \in D \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (x, y) \in \Gamma$$

ここで $\delta(x-x_+)$ はディラックのデルタ関数であり、 $(x_+, y_+), (x_-, y_-)$ は電流の source と sink の座標である。半導体薄膜の境界が非導電性の場合、電流は境界を越えては流れない。したがって境界の法線方向の微係数がゼロというノイマン型の境界条件となっている。

この問題に対する特解の一つとして

$$s(x, y) = \frac{I}{2\pi\sigma} \log \frac{\sqrt{(x-x_+)^2 + (y-y_+)^2}}{\sqrt{(x-x_-)^2 + (y-y_-)^2}} \quad (6)$$

が考えられる。この式と一般解の和 $\psi(x, y) = s(x, y) + \phi(x, y)$ を(5)式に代入すると次のラプラス方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= -\frac{\partial s(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (7)$$

この問題では境界上の法線方向の微係数を計算しなければならないので、ディリクレ型の問題より、若干面倒で

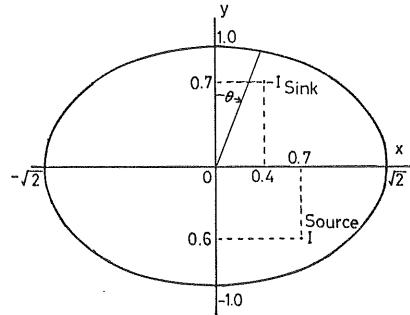


図2 2次元の電流場の問題

Fig. 2 Current field problem in two dimensions

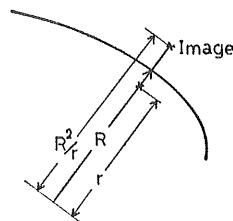


図3 近似的影像の決定法

Fig. 3 Determination of quasi-image.

あるが解を求めることができる。この問題は2次元であるので増田・松本らが提案した代用うず法⁹⁾の手法も利用することができる。

しかし特解(6)式を使ったのでは source と sink が境界の近くにくると、得られる解の誤差が大きくなる。その場合、次の特解が精度のよい解を与える。

$$s(x, y) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left\{ \log \frac{\sqrt{(x-x_+)^2 + (y-y_+)^2}}{\sqrt{(x-x_-)^2 + (y-y_-)^2}} + \log \frac{\sqrt{(x-x'_+)^2 + (y-y'_+)^2}}{\sqrt{(x-x'_-)^2 + (y-y'_-)^2}} \right\} \quad (8)$$

ここで (x'_+, y'_+) と (x'_-, y'_-) は source と sink の境界に関する近似的影像である。境界を局所的曲率半径と同じ半径の円と考えて、影像の位置を決めた(図3参照)。

特解(6)式と(8)式の違いによって、得られる解の精度に違いがあるのは、解くべきラプラス方程式(5)の境界条件が違うからである。図4に特解(6)と(8)を用いたときの境界条件の形を示す。横軸は鉛直軸を中心として時計方向にはかった角度 θ (図2に示す)で単位は度である。図4(a)は source と sink が境界に近いために生じた正負2個の鋭いピークがある。(b)は(8)式を用いた場合で、近似的影像によって、ピークが打ち消され、滑らかな形になっている。図4(c)は近似的影像を

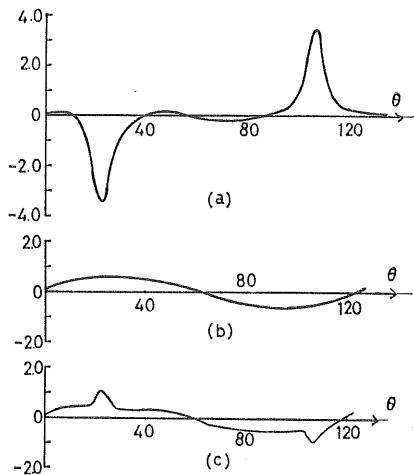


図4 種々の特解に対する境界条件 (source と sink の位置は図2参照)

Fig. 4 Boundary conditions corresponding to various particular solutions.

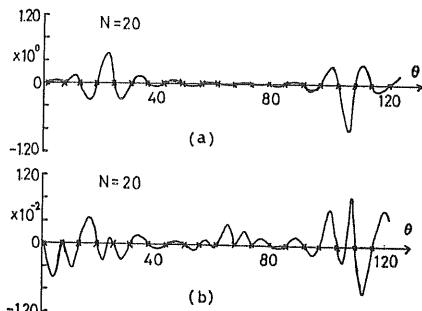


図5 境界上の誤差分布

Fig. 5 Error distribution on the boundary.

局所的曲率半径を無限大と考えて決定した場合である。ピーカーを完全に消していなことがわかる。急峻な境界条件より、滑らかな境界条件のほうが模擬しやすく、精度がよいのは当然のことであろう。

図5には特解(6)と(8)を用いた場合の境界上の誤差を示す。横軸は図4の場合と同じ角度である。図5は $N=20$ の場合で最大誤差は $1/100$ になっている。電荷数 N を増加させると急峻な境界条件も模擬しやすくなるので近似的影像の効果は相対的に減る。 $N=60$ の場合では $1/20$ 程度しかよくない。図6にこの場合の電位分布を示す。この問題におけるsourceとsinkの位置は図2に示すおりである。

3.2 3次元軸対称の石油タンクの問題

石油タンクの爆発事故と関連して、石油タンク内の電位分布の計算が必要になる¹⁰⁻¹²⁾ (図7参照)。この場合

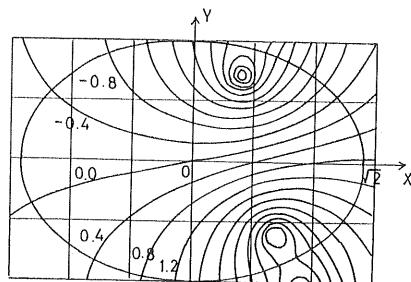


図6 電流場の問題の電位分布

Fig. 6 Potential distribution of the current field problem.

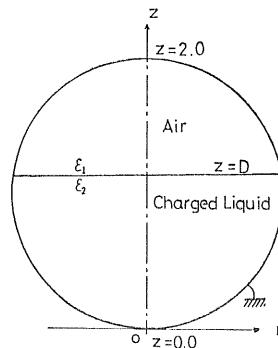


図7 軸対称の石油タンクの問題

Fig. 7 Axi-symmetric problem of oil tank.

はポアソン方程式は次の形をとる。

$$\nabla^2 \psi(r, z) = 0 \quad z \geq D \quad (9)$$

$$\nabla^2 \psi(r, z) = -\rho/\epsilon_1 \quad z \leq D \quad (10)$$

$$\psi(r, z) r = 0 \quad (11)$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=D+0} = \epsilon_1 \frac{\partial \psi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=D-0} \quad (12)$$

ここで ϵ_1, ϵ_2 は石油および空気の誘電率である。 D は石油面の Z 座標である。図7において石油タンクを球形としているが、軸対称であればどんな形でも解析できる。ここで ϵ_1, ϵ_2 は石油および空気の誘電率である。 D は石油の面の Z 座標である。

ここで(10)式の電荷密度 ρ は一定と仮定している。

3.2.1 タンクが完全に満たされている場合 ($D > 2.0$)

最初から一般的な問題を扱うのは複雑になりすぎるのを石油タンクに石油が満ちている場合を扱おう。この場合ポアソン方程式は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi(r, z) &= -\rho/\epsilon \\ \psi_r(r, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる。以下の三つの式が(13)式の特解であることは容易に確かめることができる。

$$s_1(r, z) = -(\rho/\epsilon) \{(r^2 + z^2)/6\} \quad (14)$$

$$s_2(r, z) = -(\rho/\varepsilon)(z^2/2) \quad (15)$$

$$s_3(r, z) = -(\rho/\varepsilon)(r^2/4) \quad (16)$$

特解は以上の(3)式以外に無数に存在する。 a, b, c を定数として $ar+bx+c$ を加えたものも特解である。(14)式は(15)式と(16)式を1対2の割合で加重平均したものであるが、それ以外の割合で加え合わせたものも特解である。

$\phi(r, z) = s_i(r, z) + \phi(r, z)$ として(13)式に代入する

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(r, z) = 0 \\ \phi(r, z) r = -s_i(r, z) r \end{array} \right\} \quad i=1, 2, 3 \quad (17)$$

となる。

タンクを半径1の球形とし、12個の代用電荷を用いて解析した結果を図8に示す。横軸 R は球形タンクの中心から代用電荷系までの距離である。同じ距離の場合は特解(1) $s_i(r, z)$ を用いた場合がいちばん精度がよい。この場合のラプラス方程式の境界条件は一定値であり、これ以上おだやかな境界条件はない。ここで縦軸は誤差であるが、各拘束点のあいだに3点ずつとった検査点における電位誤差の自乗平均の平方根をとっている。

3.2.2 タンクが部分的に満たされている場合

防災上重要な一般的の場合の支配方程式は(9)～(12)式で与えられる。この場合の特解として、図9の有限厚さの電荷層の電位を採用する。この電荷層の電荷分布は

$$\rho(r, z) = \begin{cases} 0 & z > D \\ \rho & D \geq z \geq -D \\ 0 & z < -D \end{cases} \quad (18)$$

である。 $z=0$ で0になる電位分布は

$$s(z) = \begin{cases} (\rho/\varepsilon_2)D\{(D-z) - (\varepsilon_2/2\varepsilon_1)D\} & z \geq D \\ -(\rho/2\varepsilon_1)z^2 & D \geq z \geq -D \\ (\rho/\varepsilon_2)D\{(D+z) - (\varepsilon_2/2\varepsilon_1)D\} & z \leq -D \end{cases} \quad (19)$$

となる。石油タンクの底は $z=-D$ の面より上にあると仮定し、 $z=D$ の面のみを利用するのである。電荷層の厚さを有限とした理由は、そうしなければそれによる電界強度が無限大となり、計算できないからである。(19)式を利用すると解は

$$\phi(r, z) = s(z) + \phi(r, z) \quad (20)$$

と仮定できる。ポアソン方程式に(20)式を代入すると

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(r, z) = 0 \\ \phi(r, z) = -s(z) r \end{array} \right\} \quad (r, z) \in \Gamma \quad (21)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=D-0} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=D+0}$$

が得られる。このラプラス方程式は $z=D$ の面を境に誘電率が $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ と違った値をとる点が面倒である。

通常の代用電荷法では領域を二つにわけ、それぞれの

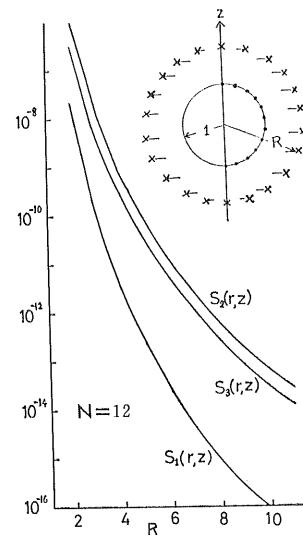


図8 種々の特解に対する誤差(電荷数12)

×：電荷、●：拘束点

Fig. 8 Errors corresponding to various particular solutions.

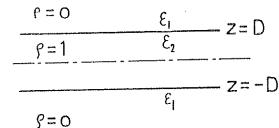


図9 有限の厚さの電荷層

Fig. 9 A charged layer of finite thickness.

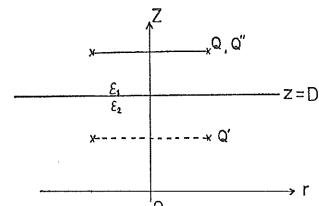


図10 リング電荷と誘電率の不連続面

Fig. 10 Unit ring charge located parallel to the discontinuity plane of dielectrics.

領域の周囲に代用電荷を配置し、 $z=D$ の境界面の条件を満足させるが、ここでは影像法を使って厳密に境界条件を満足させることができるのである。計算時間、精度の両面で得である。

図10に示すように誘電率の不連続面に平行に置かれた円線電荷による電位は誘電率が一様の場合の単位電荷による電位分布を $F(r, z; R, E)$ とすれば

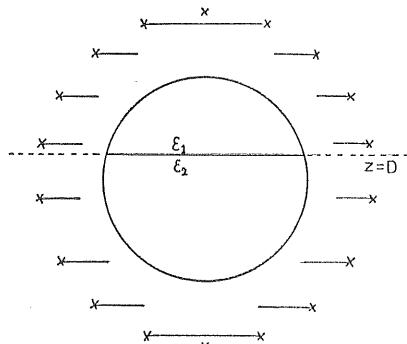


図 11 代用電荷の配置

Fig. 11 Locations of substitute charges.

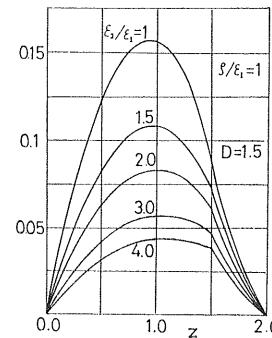


図 13 軸上の電位分布

Fig. 13 Potential distribution along the center axis.

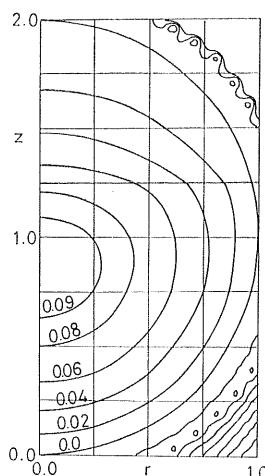


図 12 石油タンク内の電位分布

Fig. 12 Potential distribution in the tank.

$$V(r, z) = \begin{cases} QF(r, z; R, E) & z \geq D \\ +Q'F(r, z; R, 2D-E) & \\ Q''F(r, z; R, E) & z \leq D \end{cases} \quad (22)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} Q' &= (1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1) / (1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1) Q \\ Q'' &= 2 / (1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1) Q \end{aligned} \quad (23)$$

である。(22)式は円線電荷の位置 $E \geq D$ の場合であるが $E < D$ の場合は

$$V(r, z) = \begin{cases} Q''F(r, z; R, E) & z \geq D \\ QF(r, z; R, E) & \\ +Q'F(r, z; R, 2D-E) & z \leq D \end{cases} \quad (24)$$

ここで Q' , Q'' は(23)式中の ε_1 と ε_2 を交換した式で与えられる。(22), (24)式を重ね合わせることにする。代用電荷の配置は図 11 に示すように石油タンクの外側だけよい。誘電率の不連続面 $z=D$ での境界条件は解析的に厳密に満たされている。

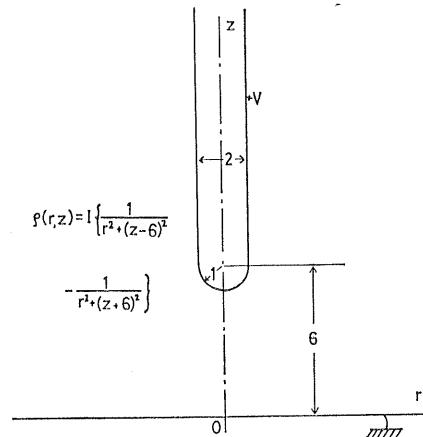


図 14 棒対平板電極の問題

Fig. 14 Potential problem related to rod-plane electrodes

特解(19)式を用いた解析では代用電荷数 $N=29$ で最大誤差 10^{-4} 程度が得られた。図 12 および図 13 に石油タンク内の電位分布の解析結果を示す。これだけ精度のよい解析を有限要素法や差分法で得ようとすると膨大な計算時間と費用がかかるはずである。

3.3 棒対平板電極に関する例題

図 14 に示すように、高電圧のかかった棒対平板電極の間に $\rho(r, z)$ の空間電荷が分布している場合のポアソン方程式を考えよう。物理的対応をぬきにして $\rho(r, z)$ を次のように仮定する。

$$\rho(r, z) = \frac{I}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2 + (z-d)^2} - \frac{1}{r^2 + (z+d)^2} \right] \quad (25)$$

支配方程式は

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi(r, z) &= -\rho(r, z)/\epsilon & (r, z) \in D \\ \psi(r, z) &= \begin{cases} +V & (r, z) \text{ 棒電極上} \\ +0 & (r, z) \text{ 平板上} \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

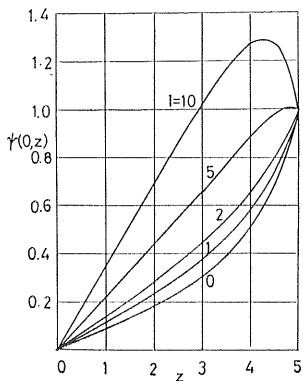


図 15 軸上の電位分布

Fig. 15 Potential distribution on the axial line.

となる。この場合の特解として

$$s(r, z) = \frac{I}{4\pi\varepsilon} \log \sqrt{\frac{r^2 + (z-d)^2}{r^2 + (z+d)^2}} \quad (27)$$

が考えられる。

特解(27)式を用いて行なった解析結果を図 15 に示す。回転軸上の電位分布の I による変化を示す。

4. 数値的に特解を得る方法について

前章の例のように解析的に特解が得られる例は多くない。数値的に特解を得る方法について簡単にふれておく。

3 次元軸対称の問題で電荷分布が r だけの関数である場合、ポアソン方程式は

$$(\partial^2\psi/\partial r^2) + (\partial\psi/r\partial r) = f(r) \quad (28)$$

となる。さらに電荷分布が z だけの関数の場合は

$$\partial^2\psi/\partial z^2 = g(z) \quad (29)$$

となる。ここで f と g は任意の形でよい。これらの式は Runge-Kutta の公式⁽¹³⁾で実用上十分な精度で解きうる。特解であるから境界条件は指定されていないが、適当な条件を仮定して解かねばならない。

(28), (29)式を Runge-Kutta 法で解くと、特解は r (または z) の離散的な値で与えられる。任意の r (または z) の値についてただちに特解の値が得られるような補間ルーチンを作成して、本論文で述べた方法を使う。

特解の精度が悪ければ全体の精度が落ちるので、必要な精度より、1 術程度高い精度で特解を求める必要がある。もし電荷分布が r と z の関数であれば、偏微分方程式を解くことになり、数値的にかなり困難である（もともと電荷分布が r と z の関数の和の形に表現できる場合は変数分離をして常微分方程式にもち込むことができる）。

特解を求めるのに時間がかかりすぎたり、精度が悪すぎるようでは代用電荷法に持ち込む意味がなくなる。たとえば差分法等の離散化法を使って特解を得ることもできるが、最初からポアソン方程式を差分法で解く場合と同じ労力をかけることになりかねない。

実際の問題では電荷の存在する領域が空間的に限られている場合が多い。こういう場合には有限要素法と代用電荷法の長所を組み合わせたというコンビネーション計算法⁽¹⁴⁾が利用できる。つまり電荷が存在するところを有限要素法で扱い、電荷が存在しないところは代用電荷法を適用する方法である。

5. 結論

代用電荷法はラプラス場の重合せ法であるからポアソン場の解析には本質的な困難がともなう。空間電荷の影響をいかに処理するかが問題になる。

この論文ではポアソン方程式の特解が何らかの方法で得られる場合には空間電荷の影響を境界条件にくり込んでラプラス方程式に帰着させ、通常の代用電荷法で解く方法を示した。例として解析的に特解が得られる二、三の問題を扱ったが、満足すべき結果が得られた。

ここで提案した方法は特解を求めるのに時間がかかりすぎたり、精度が悪すぎたりしなければ、代用電荷法の長所を殺さない、有効な方法と考えている。

この論文が空間電荷が存在する場合の解析法の発展への一助となれば幸いである。

参考文献

- 1) H. Steinbigler : 学位論文, T.H. München (1969).
- 2) 増田閃一, 松本陽一 : 電気学会論文誌, 93-A (1973), 305.
- 3) H. Singer, H. Steinbigler and P. Weiss : IEEE Trans. Power Appar. Syst., 93 (1974), 1660.
- 4) 青山道夫, 増田閃一 : 電気学会論文誌, 95-A (1975), 505.
- 5) 村島定行, 加藤三三男, 宮近誠史 : 同上, 98-A (1978), 39.
- 6) 清野 武 : 電気激気学 I, p. 252, オーム社 (1962).
- 7) 増田閃一 : 静電気学会誌, 1, 1 (1977), 18.
- 8) L.B. Valdes : Proc. IRE, 14 (1954), 420.
- 9) 増田閃一, 松本陽一 : 電気学会論文誌, 96-A (1976), 51.
- 10) H. Kramer and G. Schön : Proc. 9th World Petroleum Congress 1975, Vol. 6, p. 147, Tokyo (1976).
- 11) K. Asano : Proc. IEE, 124, 12 (1977), 1277.
- 12) 浅野和俊 : 静電気学会誌, 1, 1 (1977), 59.
- 13) P. Henrich : *Discrete Variable Method in Ordinary Differential Equation*, p. 62, John Wiley & Sons (1964).
- 14) 大久保義仁, 池田正巳, 木多正己 : 電力技術研究会, PE-79-10 (1979).