

電界カーテン上の帯電粒子の運動の解析

—慣性を無視できる条件下での二次元運動—

高畑 裕基^{*1}, 山口 智責^{*}

(2008年11月21日受付; 2009年5月4日受理)

Analysis of Motion of Charged Particles above an Electric Curtain

—Two-dimensional Motion Where the Mass is Negligible—

Yuki KOHATA^{*1} and Chiseki YAMAGUCHI^{*}

(Received November 21, 2008; Accepted May 4, 2009)

The motion of charged particles above an electric curtain was analyzed under the condition where the motion is limited within two-dimension and the mass is negligible. The case where the particles never touch an electric curtain device was especially considered. In this case, the particles levitate and rotate. Additionally these are propelled in the direction of the traveling electric field at slower speed than that of the traveling wave. We could quantitatively explain the motion by defining CCC (Critical Conveyance Coefficient) in this paper with introducing a special function "Lambert W function".

1. はじめに

線状電極に多相交流高電圧を印加することにより, 帯電粒子を電気力学的に浮上させ, 進行波方向に搬送することができることを, 増田は示した. 彼は, これを「電界カーテン」と名づけた¹⁾.

さらに, Melcher, Warren, Kotwal は, ポテンシャルが純正弦波であるように理想化された問題での数値シミュレーションと限定された解析に取り組んだ. そこで, 帯電粒子の搬送が, 進行波の速度に同期する「同期モード」と進行波の速度に遅れる「非同期モード」に分けられることを示した²⁾.

単純なモデルを立てて解析解を導出するということが, 運動を解明する上で真っ先に取り掛かるべき仕事である. 電界カーテン上の帯電粒子の運動を記述する最も簡単なモデルは, ポテンシャルを純正弦波に理想化し, 慣性を無視し, 帯電粒子が受ける力を電界から受ける力と空気抵抗に限定したものである. 一次元運動モデルにおいては, 解析解が導出されているもの²⁾, 粒子の運動が一次元に拘束されていない場合には, 帯電粒子は浮遊・回転という特有な運動をする

ことが知られており¹⁾, この運動を詳細に説明するためには, 二次元運動モデルの解析が必要である. しかし, 二次元運動モデルでの帯電粒子の運動を表す厳密な解析的知見は, 未だ得られていない.

本論文では, 二次元運動モデルにおける帯電粒子が常時浮遊する「カーテンモード」での粒子の運動について, 解析的知見を得ることができたのでこれを報告する.

ここでは, まず, 二次元運動モデルでの議論にスムーズに移行するために一次元運動モデルでの解析の概略を示す. 次に, 「カーテンモード」での帯電粒子の運動について議論していく. はじめに, 帯電粒子が電界カーテンの上部で運動する範囲の解析解を示す. 次に, 本論文での考察範囲である帯電粒子が常時浮遊する条件を示す. さらに, 任意の初期条件での帯電粒子の平均進行速度が「標準形」と定義した運動の平均進行速度に帰結されることを示した後で, 最後に「標準形」の運動について考察する.

2. 一次元運動

二次元運動での理論にスムーズに移行するために, まず運動が一次元に制限される場合での解析の概略を示す.

空間の電位を, 進行波の進行方向を x の正方向, 時間を t として,

$$\phi(x, t) = V \cdot \sin(\omega t - kx + \theta) \quad (1)$$

と表す. ここで,

V : 印加交流電圧の振幅

ω : 印加交流電圧の角周波数

キーワード: 電界カーテン, 進行波電界, ランベルトの W 関数.

* ユーテック (株) 商品事業本部 (630-8131 奈良県 奈良市 大森町 21-1)

U-TEC Corporation, Product Business Group, 21-1 Ohmori-cho, Nara-shi, Nara, 630-8131, Japan

¹ yuki.kohata@u-tc.co.jp

k : 進行波の波数

θ : 印加交流電圧の初期位相

である.

従って, 電界は,

$$E(x,t) = -\partial\phi/\partial x = kV \cos(\omega t - kx + \theta) \quad (2)$$

である.

慣性を無視した帯電粒子 (球体) の運動方程式は,

$$(6\pi\eta R) \cdot \frac{d}{dt} x(t) = q \cdot E(x(t), t) \quad (3)$$

である. ただし,

η : 空気の粘性抵抗係数

R : 帯電粒子の半径

q : 帯電粒子の帯電量

である.

従って, 帯電粒子の運動は次の微分方程式で,

$$\frac{d}{dt} x(t) = uC \cdot \cos(\omega t - kx(t) + \theta) \quad (4)$$

と表すことができる. ここで,

$u \equiv \omega/k$ は, 進行波の速さである. さらに,

$C \equiv \frac{qk^2V}{(6\pi\eta R)\omega} (\geq 0)$ は, 微分方程式の解を分別する係数

であって, CCC (Critical Conveyance Coefficient) と名づける.

$\tilde{x} = kx$, $\tilde{t} = \omega t$ と規格化すれば,

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{x}(\tilde{t}) = C \cdot \cos(\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t}) + \theta) \quad (5)$$

となり, この微分方程式を解くことによって, 初期条件にかかわらず,

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = 1 - \sqrt{1 - C^2} \quad (0 \leq C < 1) \quad (6)$$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \cong 1 \quad (1 \leq C) \quad (7)$$

であることが分かる. これは, Melcher, Warren, Kotwal によって得られている解と同一のものである²⁾. しかし, 我々と彼らの解とは, パラメーターの取り方が異なり, さらに, 彼らは同期・非同期の2つのモードに分かれることを前提として解を導出しているが, 我々は原理的に2つのモードに分かれると証明したので, 導出を載せておく. 「Appendix A 参照.」

ここで, $d\tilde{x}/d\tilde{t} = 1$ とは, $dx/dt = u$, つまり帯電粒子が進行波と同じ速度で搬送されることを意味する. CCC と「帯電粒子の搬送速度」(進行波の速度に対する割合) の関係を Fig. 1 に示す. 帯電粒子の運動は, $C = 1$ を境に2種に分別されている. $C \geq 1$ の領域では, $(dx/dt)/u = 1$ であり, 搬送速度は CCC にかかわらず進行波の速度と同期する. 一方, $C < 1$ の領域は, $(dx/dt)/u < 1$ であり, 搬送速度は式 (6) に示す割合に従って低下している.

ここで, 慣性を無視できる条件について言及する. 慣性を

考慮した運動方程式は,

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + (6\pi\eta R) \cdot \frac{d}{dt} x(t) = q \cdot E(x(t), t) \quad (8)$$

である. ただし, m : 帯電粒子の質量 である.

規格化後の運動方程式は,

$$\frac{m\omega}{6\pi\eta R} \frac{d^2\tilde{x}(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} + \frac{d\tilde{x}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = C \cdot \cos(\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t}) + \theta) \quad (9)$$

であり, 第一項の係数を

$$M \equiv \frac{m\omega}{6\pi\eta R} \quad (10)$$

として, $M \ll 1$ のときに慣性が無視できると予想する.

3. 二次元運動

3.1 帯電粒子の運動の範囲

この節では, 二次元運動モデルでの運動方程式を記述し, 帯電粒子が動きうる範囲を導出する. さらに, 運動が周期的であることを示す.

二次元運動モデルの場合も一次元の場合と同様に, 空間の電位を次のように表す.

$$\phi(x, y, t) = V \exp(-ky) \cdot \sin(\omega t - kx + \theta) \quad (y \geq 0) \quad (11)$$

ただし, y 方向は, 進行波の進行方向と垂直な方向である.

解くべき連立微分方程式は, 一次元のと全く同じ手続きにより,

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{x}(\tilde{t}) = C \cdot \exp(-\tilde{y}(\tilde{t})) \cdot \cos(\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t}) + \theta) \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{y}(\tilde{t}) = C \cdot \exp(-\tilde{y}(\tilde{t})) \cdot \sin(\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t}) + \theta) \quad (13)$$

と導出される.

連立微分方程式に対して,

$$\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t}) + \theta = \varphi(\tilde{t}) \quad (14)$$

の変数変換を施す. このとき,

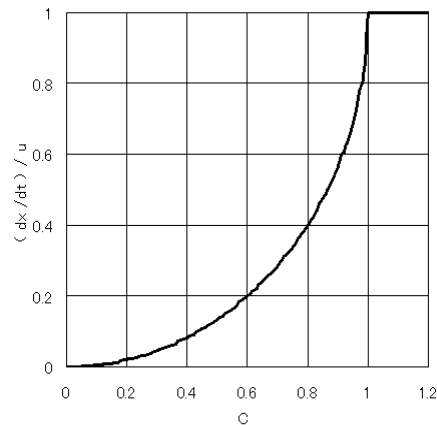


図1 C と(dx/dt)/u の関係

Fig.1 Relationship between C and (dx/dt)/u.

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{x}(\tilde{t}) = 1 - \frac{d}{d\tilde{t}} \varphi(\tilde{t}) \quad (15)$$

である。連立微分方程式は、

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \varphi(\tilde{t}) = 1 - C \cdot \exp(-\tilde{y}(\tilde{t})) \cdot \cos \varphi(\tilde{t}) \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{y}(\tilde{t}) = C \cdot \exp(-\tilde{y}(\tilde{t})) \cdot \sin \varphi(\tilde{t}) \quad (17)$$

と変形される。

ここから、全微分の公式を利用して、さらに初期条件 $(\varphi(0), \tilde{y}(0)) = (\theta, y_0)$ を考慮することにより、

$$\tilde{y}(\varphi) = W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta) \cos \varphi) + C' \cos \theta + y_0 \quad (18)$$

が導出される。ただし、

$$C' \equiv C \exp(-y_0) \quad (19)$$

である。さらに、

$$-C \cdot \exp(-\tilde{y}(\tilde{t})) \cdot \cos \varphi(\tilde{t}) = \tilde{y}(\tilde{t}) - (C' \cos \theta + y_0) \quad (20)$$

であることも分かる。「Appendix B 参照。」

ここで、 W_0 は「ランベルトのW関数」: $f(x) = xe^x$ の逆関数において定義域を $-1/e \leq x$ に制限したものである。

Fig. 2 に $W_0(x)$ のグラフを示す。単調増加関数であり、 $\cos \varphi$ の振動に従って $\tilde{y}(\varphi)$ も振動することが分かる。

Fig. 3 に、 $y_0 = 1$, $C = 0.2$ の場合での $\tilde{y}(\varphi)$ の範囲を示す。運動範囲は初期条件で異なることが分かる。例えば、 $\theta = 0$ のときには初期位置から上方の範囲にあり、 $\theta = \pi$ のときには初期位置から下方の範囲にあって大きく振幅する。

ここで、すぐ後で示すように $\varphi(\tilde{t})$ は単調増加関数であるので、 $\theta = 0$ のとき $\varphi(\tilde{t})$ は $\varphi(0) = 0$ から単調に増加し、 $\theta = \pi$ のとき $\varphi(0) = \pi$ から単調に増加する。初期の運動については、式 (15), (16), (17) より、 $\theta = 0$ のときには進行波の進行方向に搬送された後に上方に移動し、 $\theta = \pi$ のときには進行波と逆方向に搬送された後に下方に移動する。

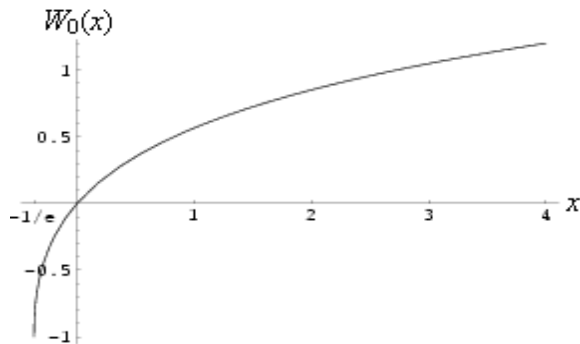


図2 $W_0(x)$ のグラフ

Fig.2 The graph of $W_0(x)$.

以上の帯電粒子の存在範囲に関する議論では、 $\cos \varphi(\tilde{t})$ の値域が $-1 \leq \cos \varphi(\tilde{t}) \leq 1$ であることが前提となるが、これは次より保障を与える。

式 (16) に式 (20), (18) を順に代入することにより、

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} = W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta) \cos \varphi) + 1 \quad (21)$$

である。 $(\tilde{y}(\varphi))$ は、 φ を通じて、 \tilde{t} の関数でもあることに注意。) ここで、

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \geq -1 + 1 = 0 \quad (22)$$

である。 $\varphi(\tilde{t})$ は \tilde{t} の増加と共に単調に増加する。従って、 $\cos \varphi(\tilde{t})$ は \tilde{t} の増加と共に $-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$ の値を取りうる。

さらに、帯電粒子の運動が周期的であることを示す。

$\varphi(\tilde{t})$ の逆関数 $\tilde{t}(\varphi)$ を考えると、式 (21) より、

$$\frac{d\tilde{t}}{d\varphi} = \frac{1}{W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta) \cos \varphi) + 1} \quad (23)$$

である。これは、 φ の周期 2π 、の周期関数である。したがって、 $d\varphi/d\tilde{t}$ も周期関数である。式 (18), (21) より、

$$\tilde{y}(\tilde{t}) = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} + C' \cos \theta + y_0 - 1 \quad (24)$$

も周期関数であることが分かる。つまり、帯電粒子の運動は周期的であり、初期の運動状態が永遠に継続する。

3.2 $\tilde{y} \geq 0$ を満たす範囲

ここでは、帯電粒子が常に $\tilde{y} \geq 0$ で浮遊する条件を示す。

$\tilde{y}(\varphi)$ は、 $\cos \varphi = 1$ のとき最小値をとり、

$y_{MIN} = W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta)) + C' \cos \theta + y_0 \geq 0$ と、 $W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta))$ の定義域に関する条件から、

$$y_0 \geq C + W_0(-C \exp(-C) \cos \theta) \quad (0 \leq C < 1) \quad (25)$$

$$y_0 \geq \log(-C \cos \theta / W_0(-\cos \theta / e)) \quad (1 \leq C) \quad (26)$$

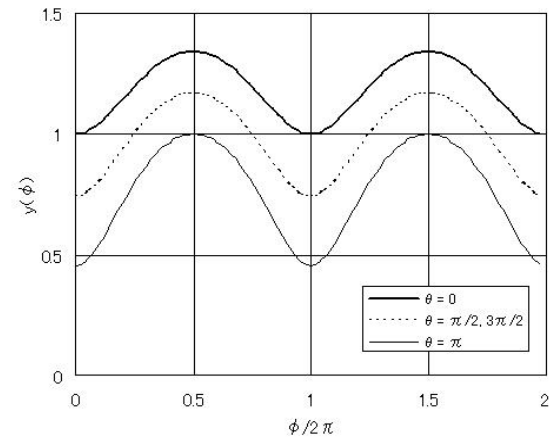


図3 $\tilde{y}(\varphi)$ の取りうる範囲 ($y_0 = 1, C = 0.2$)

Fig.3 The available range of $\tilde{y}(\varphi)$ ($y_0 = 1, C = 0.2$).

が求まる。「Appendix C 参照。」

これを Fig. 4 に示す。グラフ上の曲線から上部の範囲が条件を満たす範囲である。 y_0 の増加と共に電界強度が低下するので、電界強度に比例するパラメーターである CCC の値が大きくなること許される。

3.3 「標準形」への帰結

「標準形」とは、式 (18) について、初期条件 $(\theta, y_0) = (0, 0)$ としたもの、

$$\tilde{y}(\varphi) = W_0(-C_S \exp(-C_S) \cos \varphi) + C_S \quad (27)$$

で軌跡が表される運動のことである。ただし、このときの CCC の値を C_S とする。ここでは、任意の初期条件での平均進行速度が「標準形」の平均進行速度に帰結できることを示す。

任意の初期条件の場合を考える。 $\cos(\varphi)$ が一周する時間 $0 \leq \tilde{t} \leq T$ で $d\varphi/d\tilde{t}$ の平均は、

$$\overline{\frac{d\varphi}{d\tilde{t}}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \frac{2\pi}{T} \quad (28)$$

である。ここで、

$$\varphi(T) = 2\pi \quad (29)$$

である。このとき、式 (21) より、

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\tilde{t}}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta) \cos \varphi) + 1} \quad (30)$$

である。つまり、

$$-C' \exp(-C' \cos \theta) \quad (31)$$

によって、平均進行速度が決定されることが分かる。

このときの CCC を、

$$C_S = -W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta)) \quad (32)$$

$$(0 \leq C_S < 1)$$

と変換する。すると、式 (31) の値は「標準形」のものと同じ

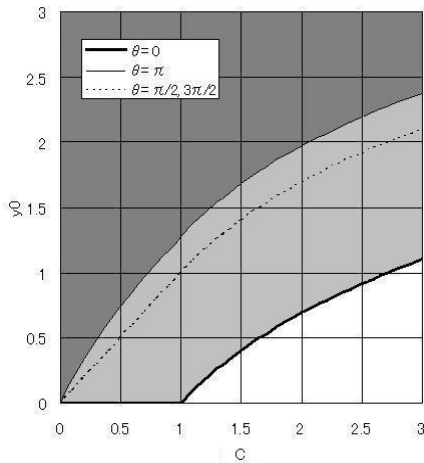


図 4 本論文が適用可能な y_0 と C が取りうる範囲
Fig.4 The available range of C - y_0 for this paper.

致する。「Appendix D 参照。」つまり、平均進行速度を考える場合には、図 4 の式 (25), (26) を満たす平面は、線分 $0 \leq C_S < 1$ に写される。「標準形」の平均進行速度が既知ならば、そこから任意の初期条件での平均進行速度が分かる。

3.4 「標準形」での帯電粒子の運動

3.4.1 回転の証明

ここでは、「標準形」

$$\tilde{y}(\varphi) = W_0(-C_S \exp(-C_S) \cos \varphi) + C_S \quad (27)$$

の帯電粒子の運動について考察する。

帯電粒子の存在範囲は、

$$0 \leq \tilde{y} \leq W_0(C_S \exp(-C_S)) + C_S \equiv \tilde{y}_{MAX} \quad (33)$$

であり、式 (25), (26) より、粒子が浮遊する条件は、

$0 \leq C_S < 1$ である。

さらに、帯電粒子が回転運動をすることを証明する。ここで、回転運動とは、

- ① $d\tilde{x}/d\tilde{t} \geq 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} \geq 0$, ② $d\tilde{x}/d\tilde{t} \leq 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} \geq 0$,
- ③ $d\tilde{x}/d\tilde{t} \leq 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} \leq 0$, ④ $d\tilde{x}/d\tilde{t} \geq 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} \leq 0$

のサイクルを繰り返す運動を言う。

式 (24) より、

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} = \tilde{y} + 1 - C_S \quad (34)$$

であり、さらに、式 (15) より、

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = 1 - \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} = C_S - \tilde{y} \quad (35)$$

である。また、式 (17) より、

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = C_S \exp(-\tilde{y}) \cdot \sin \varphi \quad (36)$$

である。

式 (27), (35), (36) より、単調増加関数 $\varphi(\tilde{t})$ のそれぞれの領域で、

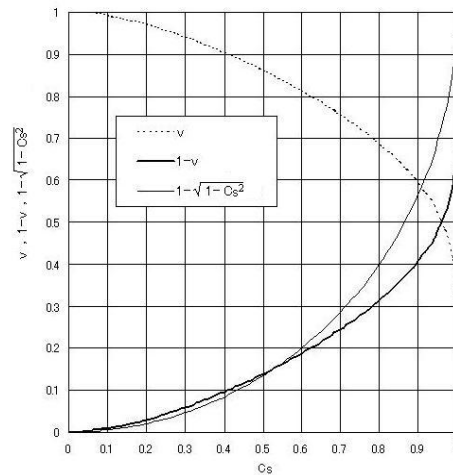


図 5 C_S と $v, 1-v$ の関係
Fig.5 The relationship between C_S and $v, 1-v$.

- ① $0 \leq \varphi < \pi/2$ のとき,
 $0 \leq \tilde{y} < C_S$, $d\tilde{x}/d\tilde{t} > 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} \geq 0$
- ② $\pi/2 \leq \varphi < \pi$ のとき,
 $C_S \leq \tilde{y} < \tilde{y}_{MAX}$, $d\tilde{x}/d\tilde{t} \leq 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} > 0$
- ③ $\pi \leq \varphi < 3\pi/2$ のとき,
 $\tilde{y}_{MAX} \leq \tilde{y} < C_S$, $d\tilde{x}/d\tilde{t} < 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} \leq 0$
- ④ $3\pi/2 \leq \varphi < 2\pi$ のとき,
 $0 < \tilde{y} \leq C_S$, $d\tilde{x}/d\tilde{t} \geq 0, d\tilde{y}/d\tilde{t} < 0$

である。さらに、3.1 節の内容より、運動は周期的である。

以上により、「標準形」において帯電粒子は回転することが示された。

任意の初期条件の場合にも、式 (15), (21), (17) により同様の手続きで、帯電粒子が回転することが簡単に分かる。

3.4.2 回転の周期と平均進行速度

ここでは、回転の周期と帯電粒子の平均進行速度を導出する。ただし、解析的な表示は困難であるので数値解を示す。

$$\overline{\cos(\varphi)} \text{ が一周する時間 } 0 \leq \tilde{t} \leq T \text{ で } d\varphi/d\tilde{t} \text{ の平均を,}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tilde{t}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} d\tilde{t} = \frac{2\pi}{T} \equiv v \quad (37)$$

とする。このとき、式 (30) より、

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\tilde{t}}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{W_0(-C_S \exp(-C_S) \cos \varphi) + 1} \quad (38)$$

であり、これを元に数値積分するのが簡便である。

Fig. 5 に式 (37), (38) から合成シンプソン公式により導出した CCC と v , $1-v$ の関係を示す。 $C_S \rightarrow 1$ のとき $v \rightarrow 0$ である。「Appendix E 参照」一次元運動モデルでの帯電粒子速度の進行波速度に対する割合 $1 - \sqrt{1 - C_S^2}$ も合わせて表示する。一次元運動モデルの場合とは値が大きく、ずれる領域が存在する。二次元運動モデルでは帯電粒子は上方に飛翔し、電界強度が減少する領域を通過するためである。

3.4.3 CCC が 1 に近づく場合

最後に本論文の理論が予言する帯電粒子の興味深い運動について紹介する。

$C_S \rightarrow 1$ のとき、 $v \rightarrow 0$ である。このとき、
 式 (35) 前半より、 $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = 1 - v \rightarrow 1$ であり、

式 (34) より、 $\tilde{y} = v + C_S - 1 \rightarrow 0$ である。

つまり、帯電粒子は、基板に沿って進行波の速度に同期して進行する。

ところで、

式 (33) より、 $\tilde{y}_{MAX} \rightarrow W_0(1/e) + 1$ であり、

式 (37) より、 $T \rightarrow \infty$ である。

以上により、帯電粒子は、基板に沿って進行しながらも長

い周期で時々 \tilde{y}_{MAX} の高さまで跳ね上がるという結果が導かれる。

4. まとめ

慣性が無視できる条件でカーテンモードでの帯電粒子の運動について以下の解析的知見を得た。

- 1) ランベルトの W 関数を使うことにより、任意の初期条件での帯電粒子の運動範囲を定量的に記述した。
- 2) 初期条件によって運動範囲が異なる。
- 3) 運動は周期的である。初期条件によって決定された運動状態を永遠に続ける。
- 4) 帯電粒子の運動状態として、浮遊したままで搬送される「カーテンモード」を取るために必要とされる条件について定量的に記述した。
- 5) 「標準形」の平均進行速度から、任意の初期条件での平均進行速度を知ることが出来ることを示した。
- 6) 帯電粒子の軌跡の概形について「カーテンモード」では、帯電粒子が回転することを証明した。
- 7) 帯電粒子の回転周期と平均進行速度について数値解を得た。
- 8) 以下の手順により、任意の初期条件での帯電粒子の平均進行速度を知ることが出来る。
 - ① パラメーター (C, y_0, θ) を知る。
 - ② 図 4 の条件を満たすことを確認する。
 - ③ 式 (18) により、運動範囲が分かる。
 - ④ 式 (32) により、CCC を変換する。
 - ⑤ 図 5 より、平均進行速度と回転周期が分かる。

Appendix A 一次元運動での解

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{x}(\tilde{t}) = C \cdot \cos(\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t}) + \theta) \text{ を解く.}$$

$$\tilde{t} - \tilde{x}(\tilde{t}) + \theta = \varphi(\tilde{t}) \text{ と変数変換すると,}$$

$$\frac{1}{1 - C \cdot \cos \varphi} \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} = 1 \text{ である.}$$

さらに、 $\tan(\varphi/2) = \tau$ と変数変換すると、

$$\frac{2}{(1+C) \left(\tau^2 + \frac{1-C}{1+C} \right)} \frac{d\tau}{d\tilde{t}} = 1 \text{ である.}$$

$$\left(\text{このとき, } \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = C \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \text{ である.} \right)$$

両辺を、 \tilde{t} で、0 から \tilde{t} まで積分する。

$$\int_{\tau(0)}^{\tau} \frac{2}{(1+C) \left(\tau^2 + \frac{1-C}{1+C} \right)} d\tau = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}$$

ここで、初期条件 $\tilde{x}(0) = 0$ なら、 $\tau(0) = \tan(\theta/2)$ である。

① $C=1$ のとき,

$$\int_{\tau(0)}^{\tau} \frac{1}{\tau^2} d\tau = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t} \quad \left[-\frac{1}{\tau} \right]_{\tau(0)}^{\tau} = \left[\tilde{t} \right]_0^{\tilde{t}}$$

$$\tau = \frac{1}{-\tilde{t} + \cot(\theta/2)} \quad \text{であり,}$$

$\tilde{t} > 1$ のとき,

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = C \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \cong 1 \quad \text{である.}$$

② $C > 1$ のとき, $b \equiv \sqrt{\frac{C-1}{C+1}}$ とする.

$$\frac{2}{1+C} \int_{\tau(0)}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau^2 - b^2} = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}$$

$$\frac{2}{1+C} \frac{1}{2b} \left[\log \left| \frac{\tau-b}{\tau+b} \right| \right]_{\tau(0)}^{\tau} = \left[\tilde{t} \right]_0^{\tilde{t}}$$

これを整理して,

$$\tau = \sqrt{\frac{C-1}{C+1}} \coth \left(-\frac{\sqrt{C^2-1}}{2} \tilde{t} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{\tan(\theta/2)+b}{\tan(\theta/2)-b} \right| \right)$$

または,

$$\tau = \sqrt{\frac{C-1}{C+1}} \tanh \left(-\frac{\sqrt{C^2-1}}{2} \tilde{t} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{\tan(\theta/2)+b}{\tan(\theta/2)-b} \right| \right)$$

である.

$\tilde{t} > 1$ のとき, \coth や \tanh は, $\cong -1$ であるから,

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = C \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \cong C \left(1 - \frac{C-1}{C+1} \right) / \left(1 + \frac{C-1}{C+1} \right) = 1 \quad \text{である.}$$

③ $C < 1$ のとき, $b = \sqrt{\frac{1-C}{1+C}}$ とする.

$$\frac{2}{1+C} \int_{\tau(0)}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau^2 + b^2} = \int_0^{\tilde{t}} d\tilde{t}$$

$$\frac{2}{1+C} \left[\frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{\tau}{b} \right]_{\tau(0)}^{\tau} = \left[\tilde{t} \right]_0^{\tilde{t}}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{1-C}{1+C}} \tan \left\{ \frac{\sqrt{1-C^2}}{2} \tilde{t} - \tan^{-1} \frac{\tan(\theta/2)}{b} \right\}$$

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = C \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \quad \text{は周期 } 2\pi/\sqrt{1-C^2} \text{ の周期関数であり,}$$

一周期の平均を取ると,

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = 1 - \sqrt{1-C^2} \quad \text{である.}$$

Appendix B 式(15)の導出

一般に,

$$\frac{dH(\varphi, \tilde{y})}{d\tilde{t}} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{y}} \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = 0$$

であれば, $H(\varphi, \tilde{y}) = \text{const.}$ である. ここで,

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{y}} = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \quad -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}}$$

となるような, H を探すと,

$$\tilde{y} + C \exp(-\tilde{y}) \cos \varphi = A$$

と書ける, ただし, A : 積分定数である.

初期条件 $(\varphi(0), \tilde{y}(0)) = (\theta, y_0)$ を考慮すると,

$$\tilde{y} + C \exp(-\tilde{y}) \cos \varphi = y_0 + C \exp(-y_0) \cos \theta$$

である. さらに以下の式変形を施す.

$$\tilde{y} - y_0 - C \exp(-y_0) \cos \theta = -C \exp(-\tilde{y}) \cos \varphi$$

$$(\tilde{y} - y_0 - C \exp(-y_0) \cos \theta) \exp(\tilde{y}) = -C \cos \varphi$$

$$(\tilde{y} - y_0 - C \exp(-y_0) \cos \theta)$$

$$\cdot \exp(\tilde{y} - y_0 - C \exp(-y_0) \cos \theta)$$

$$= -C \exp(-y_0 - C \exp(-y_0) \cos \theta) \cos \varphi$$

$$(\tilde{y} - y_0 - C \exp(-y_0) \cos \theta) \exp(\tilde{y} - y_0 - C \exp(-y_0) \cos \theta)$$

$$= -C' \exp(-C' \cos \theta) \cos \varphi$$

$$\tilde{y} - y_0 - C' \cos \theta = W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta) \cos \varphi)$$

Appendix C 本論文の適用範囲の導出

・ $0 \leq C < 1$ のとき

$$y_0 \geq -C' \cos \theta - W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta))$$

$$W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta)) \geq -C' \cos \theta - y_0$$

$$-C' \exp(-C' \cos \theta) \geq (-C' \cos \theta - y_0) \exp(-C' \cos \theta - y_0)$$

$$-C \geq -C' \cos \theta - y_0$$

$$y_0 - C \geq -C \exp(-y_0) \cos \theta$$

$$(y_0 - C) \exp(y_0) \geq -C \cos \theta$$

$$(y_0 - C) \exp(y_0 - C) \geq -C \exp(-C) \cos \theta$$

$$y_0 - C \geq W_0(-C \exp(-C) \cos \theta)$$

・ $1 \leq C$ のとき

$$-1/e \leq -C' \exp(-C' \cos \theta)$$

($\cos \theta > 0$ の場合で例示する.)

$$-\cos \theta / e \leq -C' \cos \theta \exp(-C' \cos \theta)$$

$$-C' \cos \theta = -C \exp(-y_0) \cos \theta \geq W_0(-\cos \theta / e) (< 0)$$

$$-C \cos \theta / W_0(-\cos \theta / e) \leq \exp(y_0)$$

($\cos \theta < 0$ の場合もここに帰結.)

$$y_0 \geq \log(-C \cos \theta / W_0(-\cos \theta / e))$$

($\cos \theta = 0$ の場合も含む.)

Appendix D 「標準形」への帰結

$(\theta, y_0) = (0, 0)$ のとき,

$$-C' \exp(-C' \cos \theta) = -C_S \exp(-C_S) \quad \text{である.}$$

任意の初期条件の場合,

$$C_S = -W_0(-C' \exp(-C' \cos \theta)) \quad \text{より,}$$

$$-C' \exp(-C' \cos \theta) = W_0^{-1}(-C_S) = -C_S \exp(-C_S) \quad \text{である.}$$

Appendix E $C_S \rightarrow 1$ のとき $v \rightarrow 0$ の証明

$C_S = 1$ のとき,

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{W_0(-\cos\varphi/e)+1} = \infty \quad \text{を証明する.}$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{W_0(-\cos\varphi/e)+1} = 2 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{W_0(-\cos\varphi/e)+1}$$

$\eta = W_0(-\cos\varphi/e)+1$ と変数変換する.

$$T = 2 \int_0^{1+W_0(1/e)} \frac{\exp(\eta)}{\sqrt{1-(\eta-1)^2} \exp(2\eta)} d\eta = \infty \quad \text{である.}$$

($\because 0 \leq \eta \leq 1+W_0(1/e)$ で,

$$0 < \frac{1}{\eta} \leq \frac{\exp(\eta)}{\sqrt{1-(\eta-1)^2} \exp(2\eta)} \quad \text{かつ,}$$

$$\int_0^{1+W_0(1/e)} \frac{d\eta}{\eta} = \infty \quad .)$$

参考文献

- 1) 増田閃一, 藤林宏一, 石田謙吾, 稲葉裕俊: 電気学会論文誌, **92-B** (1972) 9
- 2) J. R. Melcher, E. P. Warren, and R. H. Kotwal: Particle Sci. Technol., **1** (1989) 7
- 3) Fred W. Schmidlin: J. Electrostatics, **34** (1995) 225
- 4) Kober, R.: *Transport geladener Partikel in elektrischen Wanderfeldern*, pp. 95-138 (Dissertation, Aachen Univ. Technology) (2003)