

論 文

高抵抗粒子のコロナ荷電

増田 閃一*, 鷲津 正夫*

(1979年2月27日受理)

Ionic Charging of a Very High Resistivity
Spherical Particle

S. MASUDA* and M. WASHIZU*

(Received February 27, 1979)

Charge quantity of a spherical insulating particle imparted by ion bombardment and its increase with time as well as saturation value are derived. The results show that the saturation charge is considerably smaller than that calculated by Pauthenier's equation. For instance, only 35% of Pauthenier's limit is imparted to the particles having a specific dielectric constant $\epsilon_s=2$. An experiment is made to verify the calculated results, and a good agreement within the error of experiment is obtained.

1. まえがき

静電気の応用において粒子の荷電には主としてコロナ放電が用いられているが、この場合粒子に与えられる電荷量を正しく予測することはきわめて重要な問題である。従来はもっぱら Pauthenier の式がこの目的に用いられてきた¹⁾。しかしながら、この式は被荷電粒子が導体球の場合には正しい値を与える一方、静電粉体塗装に用いるレジン粉末や、ある種の絶縁油のようにきわめて高い抵抗率を持った粒子に対しては、約2倍もの大きな値を与えることが知られている²⁾。これは、高抵抗粒子の場合には Pauthenier の式の導出時の仮定が成立しなくなることによる。すなわち、Pauthenier は被荷電粒子のまわりに生ずる電界を、

- (1) 平等電界中におかれた、比誘電率 ϵ_s の電荷を持つない球形粒子のまわりに生ずる変歪電界
- (2) 粒子の持つ電荷が常に粒子表面上に一様に分布すると仮定した粒子電荷電界

の重畳で与えられるものとした。しかし、高抵抗粒子の場合には、電界に駆動されるイオンの衝突によって粒子上に与えられた電荷が表面上一様に分布するには長い時間要し、この意味で上記(2)の Pauthenier の仮定に反することは明らかである。

本論文では、粒子に与えられた電荷がまったく移動せず、また粒子が回転することもないものとし、荷電過程

における表面電荷密度の分布まで考慮した場合の粒子の帶電量を計算し、実験結果と比較した。

2. 帯電過程の定式化

帶電過程を定式化するにあたり、次の仮定を行なう。

- (1) 粒径 a 、比誘電率 ϵ_s を持つ球形粒子が密度 ρ の単極性の空間電荷雲閉気をもつ外部電界 E_0 中におかれている。
- (2) 粒子は回転しない。
- (3) 粒径 a は $2 \mu\text{m}$ より大きく、荷電は電界によるイオン衝突によってのみ行なわれ、熱拡散による荷電は無視できる。
- (4) 粒子の抵抗率は十分高く、注目している荷電過程のあいだ粒子に与えられた電荷の移動は無視できる。

今、正極性のイオンによる荷電について考えると、粒子表面での電気力線が内側を向いている領域でのみ荷電が可能があるので(図1)、粒子表面で成立すべき電荷連続の式は次のようになる。

$E_r(\theta) \leq 0$ なる θ の領域で

$$-\frac{\partial \sigma(\theta, t)}{\partial t} = \rho \kappa E_r(\theta) \quad (1)$$

$E_r(\theta) > 0$ なる θ の領域で

$$-\frac{\partial \sigma(\theta, t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

ここで、

(r, θ) : 球形粒子の中心を $r=0$ 、外部電界上流側を $\theta=0$ とする極座標

$\sigma(\theta, t)$: 表面電荷密度

* 東京大学工学部電気工学科 (113 東京都文京区本郷 7-3-1)
Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, University of Tokyo, 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

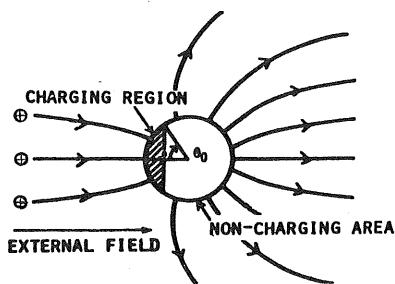


図 1 イオン衝突で荷電される領域

Fig. 1 Charging region in field-bombardment of ions.

 ρ : 空間電荷密度 κ : イオンの移動度 $E_r(\theta)$: 粒子外面での電界の法線方向の成分

または、

$$\begin{cases} E_r(\theta) > 0 \text{ なる } \theta \text{ に対し} & F(\theta) = 0 \\ E_r(\theta) \leq 0 \text{ なる } \theta \text{ に対し} & F(\theta) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

で定義される関数 $F(\theta)$ を用いれば、式(1), (2)は統一的に記述でき、次のようになる。

$$\frac{\partial \sigma(\theta, t)}{\partial t} = -\rho \kappa F(\theta) E_r(\theta) \quad (4)$$

これが帶電過程を表わす基本方程式である。ここで、 $E_r(\theta)$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ で単調に変化するので、 $E_r(\theta_0) = 0$ となるような θ_0 を用いて式(3)を次のように書くことができる。

$$F(\theta) = \begin{cases} 0 & (\theta_0 \leq \theta \leq \pi) \\ 1 & (0 \leq \theta < \theta_0) \end{cases} \quad (3)'$$

実際の計算には (3)' を使用する。

3. 規 格 化

解を一般性のある形で得るため、次の規格化を行なう。以下、添字 n によって規格化された量を表わすこととする。

i) 距離 r : $r = ar_n$ ii) 時間 t : $t = (4\pi\epsilon_0/\rho\kappa) t_n$ iii) 電荷 Q : $Q = Q_{\infty p} Q_n$

ただし、 $Q_{\infty p} = 4\pi\epsilon_0 a^2 p E_0$ (Pauthenier の飽和帶電量)、 $p = 3\epsilon_s/(\epsilon_s + 2)$ 。

上記の規格化は電界 E_r と電荷密度 σ の規格化を一意的に定める。すなわち、

iv) 電界 E_r : $E_r = (p E_0) E_{rn}$ v) 電荷密度 σ : $\sigma = (Q_{\infty p}/a^2) \sigma_n$

時間と電荷密度の規格化で、Pauthenier の荷電時定数 $4\epsilon_0/\rho\kappa$ や、粒子表面積 $4\pi a^2$ を用いない理由は、ii), v) を用いたほうが以下の式が簡単になるからである。

さて、i) ~ v) を式(4)に代入すれば、規格化された帶電過程の基本方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n(\theta, t_n)}{\partial t_n} &= -F(\theta) E_{rn}(\theta) \\ &= -F(\theta) \{E_{ext}(\theta) + E_s(\sigma_n, \theta)\} \quad (5) \end{aligned}$$

ここで、

$E_{ext}(\theta)$: 外部電界が粒子により変歪して生じた電界の法線成分 (規格化された量、添字 n を省略)

$E_s(\sigma_n, \theta)$: 粒子の持つ表面電荷により生じた電界の法線成分 (規格化された量、添字 n を省略)

本論文では、以下これらの規格化された量すべての議論をすすめる。

4. 解 法

式(5)を解くため、まず σ_n , E_{ext} , E_s の諸量をルジャンドル級数に展開する。すなわち A_m , B_m , C_m を係數として、

$$\sigma_n(\theta, t_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t_n) P_m(\cos\theta) \quad (6)$$

$$E_s(\sigma_n, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(t_n) P_m(\cos\theta) \quad (7)$$

$$E_{ext}(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m P_m(\cos\theta) \quad (8)$$

とする。

さて、外部電界による項 $E_{ext}(\theta)$ は解析的に解けて、

$$E_{ext}(\theta) = -P_1(\cos\theta) \quad (9)$$

となる。

また、 σ_n と $E_s(\sigma_n, \theta)$ の関係は、粒子表面 $r=a$ での次の境界条件を考えることによって得られる(図2)。

i) 電位の連続: $\phi_1 = \phi_2$ (10)ii) 電束の連続: $\operatorname{div} D = \sigma$

$$\text{つまり } \epsilon_s \frac{\partial \phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \phi_2}{\partial r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (11)$$

ここで添字 1, 2 はおのおの球の内側と外側の量を表わす。ところで電位は $r=0$ および ∞ で発散してはなら

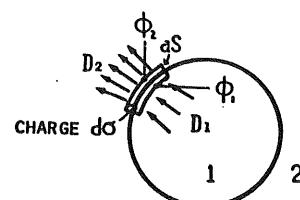


図 2 粒子表面での境界条件

Fig. 2 Boundary conditions on particle surface.

ないから、 ϕ_1 と ϕ_2 を球面調和級数を用いて表わすと次のようにになる。

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} G_m r^m P_m(\cos\theta) \\ \phi_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m r^{-m-1} P_m(\cos\theta)\end{aligned}\quad (12)$$

また、 σ も同様に展開して

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} M_m P_m(\cos\theta) \quad (13)$$

式(12), (13)を式(10), (11)に代入すれば、球外面での電界の法線成分は、

$$E_r = \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{m+1+m\varepsilon_s} \frac{1}{\varepsilon_0} M_m P_m(\cos\theta) \quad (14)$$

ここに得られた規格化されていない量 E_r, M_m のあいだに成立する関係を規格化された量の関係におすには、v), 式(6), (13)から得られる関係

$$M_m = 4\pi\varepsilon_0 p E_0 A_m \quad (15)$$

と iv) から得られる

$$E_r = p E_0 E_s(\sigma_n, \theta) \quad (16)$$

を上の式(14)に代入すればよい。すなわち

$$E_s(\sigma_n, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} 4\pi \frac{m+1}{m+1+m\varepsilon_s} A_m P_m(\cos\theta) \quad (17)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} B_m P_m(\cos\theta) \quad (7)$$

かくして式(7)の B_m は、式(6)の A_m で表わされた。

さて次に式(4)の $F(\theta)$ の乗算をルジャンドル係数間の関係に書きなおすことを考える。今、 $E(\theta)$ を

$$E(\theta) \begin{cases} < 0 & 0 \leq \theta < \theta_0 \\ = 0 & \theta = \theta_0 \\ > 0 & \theta_0 < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (18)$$

を満たす任意の関数とする。 $E(\theta)$ および $F(\theta) E(\theta)$ をルジャンドル級数に展開して

$$E(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k P_k(\cos\theta) \quad (19)$$

$$F(\theta) E(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j P_j(\cos\theta) \quad (20)$$

とすれば、ルジャンドル級数の直交性により式(18)の関係を考えて、

$$Y_j = \frac{2j+1}{2} \int_0^{\pi} \{F(\theta) E(\theta)\} P_j(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (21)$$

$$= \frac{2j+1}{2} \int_0^{\theta_0} E(\theta) P_j(\cos\theta) \sin\theta d\theta \quad (22)$$

$$= \frac{2j+1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} X_k \int_x^1 P_k(x) P_j(x) dx \quad (23)$$

ただし、

$$x = \cos\theta \quad (24)$$

または、

$$Y_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2j+1}{2} K_{jk'} X_k \quad (25)$$

ただし

$$K_{jk'} = \int_x^1 P_j(x) P_{k'}(x) dx \quad (26)$$

式(26)は解析的に積分できて、 $P_i(x)$ ($i=0, 1, 2, \dots$, $\max(j, k)$) の有理関数で表わされる。

以上の関係を用いれば、帯電過程の式(5)はルジャンドル係数間の関係で書くことができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \\ K &= \left[\frac{2j+1}{2} K_{jk'} \right] \\ D &= \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & D_{mm} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{mm} = 4\pi \frac{m+1}{m+1+m\varepsilon_s}; \text{ 対角行列} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

と書けば、式(6)～(9), (17), (25), (27)の関係を用い、式(5)は次の行列の微分方程式で表わされる。

$$\begin{aligned}\dot{A}(t_n) &= -K(t_n) \{C + B(t_n)\} \\ &= -K(t_n) \{C + DA(t_n)\}\end{aligned}\quad (28)$$

これを初期条件 $A(0)=0$ で解けば、任意の時刻における表面電荷分布が求まる。粒子の持つ全電荷は、これを積分することにより求められ、

$$\begin{aligned}Q_n(t_n) &= \int_0^{\pi} \sigma_n(\theta, t_n) dS_n \\ &= \int_0^{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t_n) P_m(\cos\theta) 2\pi \sin\theta d\theta = 4\pi A_0\end{aligned}\quad (29)$$

となる。

5. 計算誤差と計算時間

計算機を用いて式(28)を解くにあたり、以下の 2 点を考慮して誤差を実用上十分小さくすべく、時間のきざみ幅 Δt と考慮にいれる A_m の項数 N_{dim} を決定した。

(1) $\varepsilon_s = 10^4$ とすれば粒子はほとんど導体と見なしして良いが、このとき $N_{dim}=31$, $\Delta t=5 \times 10^{-3}$ として計算した結果は Pauthenier の式と 0.5% の誤差で一致した。 Δt を 25×10^{-3} とすれば誤差は 2.5% となった。

(2) $N_{dim}=31$ としたときと $N_{dim}=100$ としたときの差は 0.01% の程度であった。

ゆえに $\Delta t=5 \times 10^{-3}$ と $N_{dim}=31$ を用いて以下の計算を行なった。 $N_{dim}=31$ で時間軸を 200 ステップとったときの計算時間は、電子計算機 HITAC 8700/8800 で

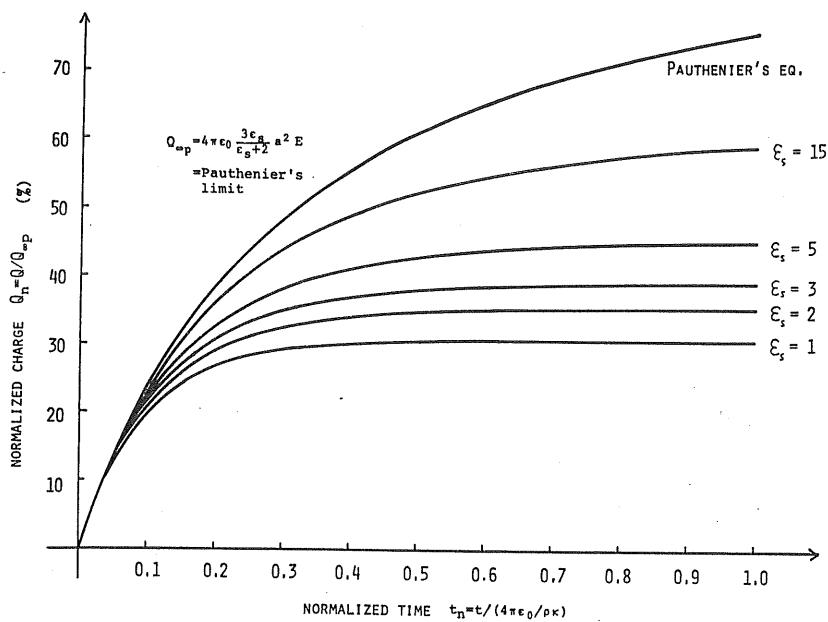


図 3 直流電界中での粒子の帶電量

Fig. 3 Time increase in particle charge in a D.C. external field.

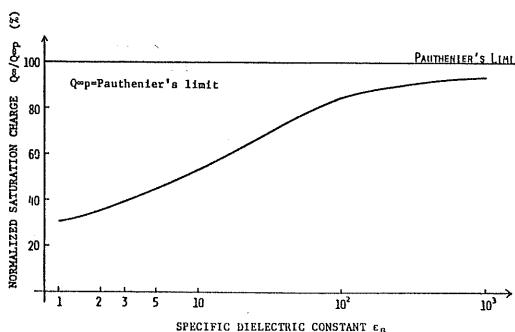


図 4 比誘電率と飽和帶電量の関係

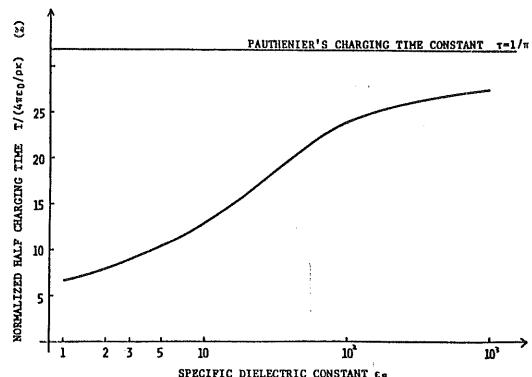
Fig. 4 Saturation charge Q_∞ as a function of specific dielectric constant ϵ_s .

図 5 比誘電率と荷電時間定数の関係

Fig. 5 Half charging time T as a function of specific dielectric constant ϵ_s .

2秒程度であった。

6. 結 果

直流電界中におかれた種々の比誘電率を有する球形誘電体粒子の帶電量の時間的な増加を、上述の方法で計算機により算出した結果を図3に示す。図4,5には、図3から得られた飽和帶電量と半値荷電時間（飽和時の1/2の電荷を得る時間）を比誘電率の関数として示す。これらの図から、比誘電率 ϵ_s の小さい粒子の得る飽和帶電量 Q_∞ は、Pauthenierの式の与える値よりかなり小さくなることがわかる。 ϵ_s が大きくなるにつれ飽和帶電量

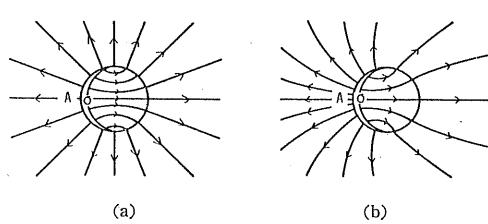


図 6 誘電率の電界分布に及ぼす影響

Fig. 6 Effect of ϵ_s on the distribution of field due to particle charge.

- (a) ϵ_s =large, Field is almost uniform over the surface,
- (b) ϵ_s =small, Field is localized on the upstream side of ion flow.

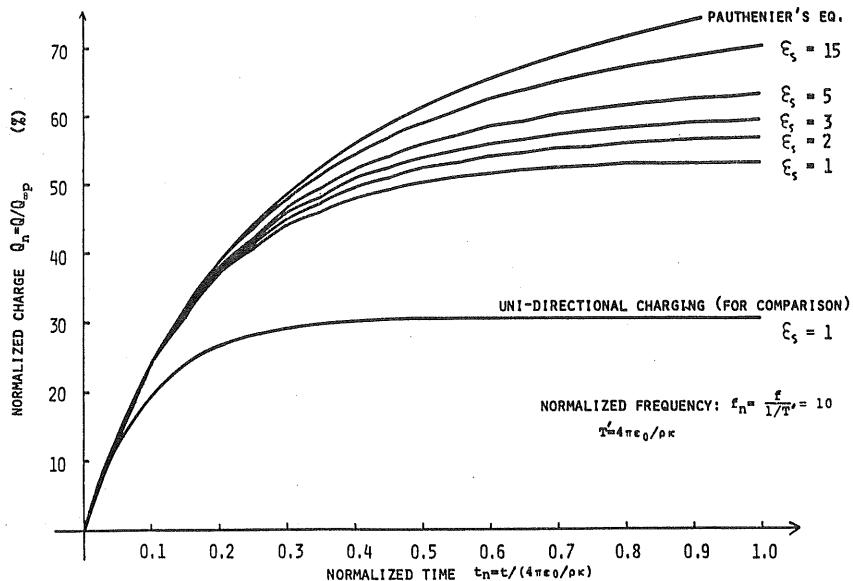
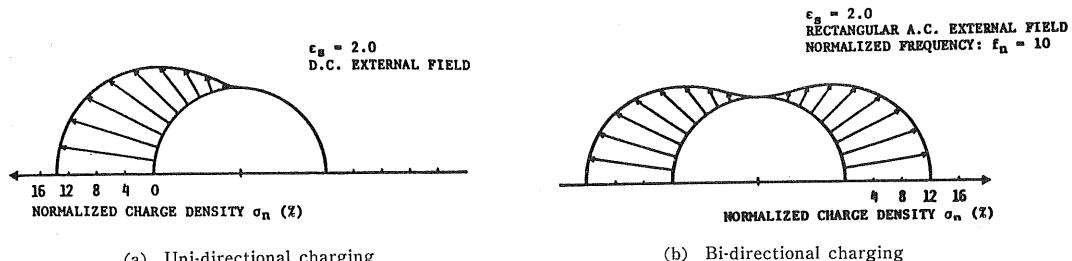


図 7 矩形交番電界中の粒子の帯電量

Fig. 7 Time increase in particle charge in an rectangular A.C. external field.

図 8 飽和時の表面電荷密度分布
Fig. 8 Saturation surface charge density σ_n in uni- and bi-directional charging as a function of θ .

Q_∞ は大きくなり、 $\epsilon_s \rightarrow \infty$ の極限で Pauthenier の飽和帶電量 $Q_{\infty p}$ に一致する。

この現象の物理的解釈を図 6 に示した。 ϵ_s が大きいときは(図 6 (a)) 粒子の持つ電荷による電界は粒子表面上でほぼ一様になり、Pauthenier の仮定を満たす結果 $Q_\infty \approx Q_{\infty p}$ となる。しかし、 ϵ_s が小さいときは(同図 (b)) イオン流の上流側に電気力線の集中が起こり、荷電を阻害する結果 $Q_\infty < Q_{\infty p}$ となる。

この電気力線の集中はイオン流の上流側にのみ起こるのであるから、もし外部電界として交流を用い単極性イオンを交互に両側から粒子に衝突させて荷電すれば、粒子の帶電はほぼ 2 倍になることが予想される³⁾。そこで、外部電界として規格化周波数 $f_n = f / (\rho\kappa / 4\pi\epsilon_0) = 10$ を持つ矩形波交番電界を用いるときの粒子の帶電量の時間的増加を上述の方法で算出し、これを図 7 に示す。曲線に現われている波形の凹凸は電界が交番することにより

生ずるものである。計算結果は、小さい ϵ_s に対する飽和帶電量は実際に外部電界が直流のときの約 2 倍になっていることを示している。このような荷電方式を単極性双方向荷電と呼び、これに対して直流電界を用いる荷電方式を単極性一方向荷電と呼ぶことにする。

図 8 に、両荷電方式における飽和時の表面電荷密度の分布を描く。もし外部電界が直流なら(同図 (a)) 電荷はイオンの上流側にのみ分布するが、交流を用いれば対称な分布が得られる(同図 (b)) ことがわかる。

7. 検 証 実 験

以上の計算結果を一方向荷電の場合について検証するため、図 9 の装置を用いて実験を行なった。高周波放電を用いて面状のプラズマイオン源を形成し、対向電極に矩形波のパルス電圧を加えることにより単極性イオンを電極間隙に引き出す。グリッド電極は、反対極性のイオ

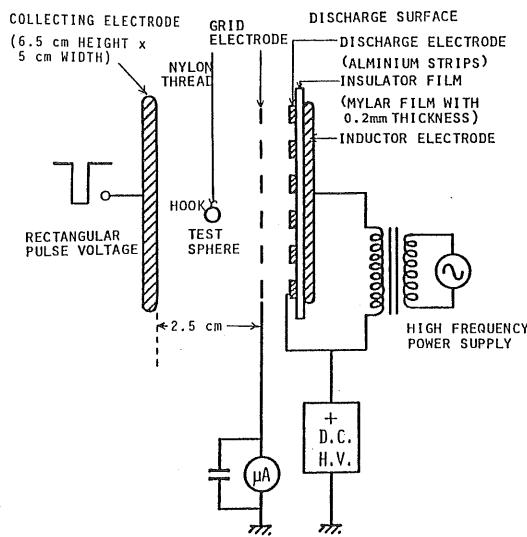


図 9 実験装置

Fig. 9 Experimental apparatus for particle charging.

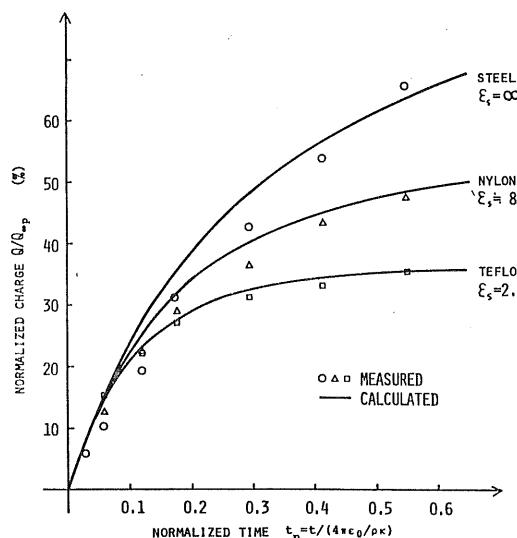


図 10 実測値の平均と計算値の比較

Fig. 10 Comparison between average measured values and calculated values in uni-directional charging.

ンが拡散により間隙内に出てくるのを阻止電界により防ぐためのものである。測定は、鋼球 ($\epsilon_s = \infty$)、ナイロン球 ($\epsilon_s \approx 8$)、テフロン球 ($\epsilon_s = 2.1$) について行なった。球径はすべて 3 mm である。小さいナイロンのフックをおののく球にとりつけ、直径 100 μm のナイロン糸でつり下げ荷電を行なった。荷電後、球を糸からはずし、荷電量をファラデーゲージで測定した。この装置により、平

等電界中において一様なイオン電流密度のもとで上記パルス電圧の幅に相当する所定の時間だけ粒子の荷電を行なうことができ、パルス幅を変えれば荷電量の時間依存性も測定できる。ここで、イオン源から被荷電粒子までイオンが移動するのに要する時間は、使用されたパルス幅に比し十分に小さいことを確認した。

測定値には最大数十%にも及ぶ比較的大きなばらつきがあったので、4回～12回の試行の平均値を図 10 に規格化して示す。実線は計算値である。計算値と測定値の平均は測定値の大きなばらつきにもかかわらずよく一致している。このばらつきはイオン電流密度の時間・空間的ばらつきによるものと考えられる。

8. 結 言

高い抵抗率を有する粒子にイオン衝突によって与えられる電荷量を計算した。計算結果によれば、

- (1) 外部電界として直流を用いる単極性一方向荷電にあっては、飽和帶電量は Pauthenier の値より常に小さくなる。とくに ϵ_s の小さいときこの傾向は大きく、 $\epsilon_s=2$ の粒子の飽和帶電量は Pauthenier の値のわずか 35% となる。
- (2) 外部電界として交流を用いる単極性双方向荷電にあっては、飽和帶電量は(1)の場合より著しく大きくなる。 $\epsilon_s=2$ の粒子の飽和帶電量は Pauthenier の値の 53% である。

単極性一方向荷電の場合について、計算値と実測値の平均値を比較したところ両者のあいだによい一致が見られた。

最後に、筆者らは当研究室の技官阿久津頤右氏および大学院生水野彰氏の助力と助言に多大の謝意を表明する次第である。

記 号 説 明

(r, θ)	: 極座標
t	: 時間
a	: 粒径
σ	: 表面電荷密度
ρ	: 空間電荷密度
κ	: イオンの移動度
ϵ_0	: 真空中的誘電率
ϵ_s	: 比誘電率
ϕ	: 電位
E_r	: 球外面での電界の法線成分
θ_0	: $E_r(\theta_0)=0$ となる角度 (図 1)
Q_{cop}	: Pauthenier の飽和帶電量
ρ	: $\rho = 3\epsilon_s/(\epsilon_s + 2)$
E_0	: 外部電界の強度
E_{rn}	: 球外面での電界の法線成分 (規格化された表現)
E_{ext}	: 外部電界によって生じた球外面での電界の法線成分 (規格化された表現)

E_s : 表面電荷によって生じた球外面での電界の法線成分
(規格化された表現)
 Q_{∞} : 飽和帶電量
 Δt : 計算にあたって用いた時間のきざみ幅
 N_{dim} : 計算にあたって用いた高調波の数

- Phys. Radium, 3 (1932), 590.
2) A. Javaid, G. Crum, G. Castle, I. Inculet and
K. Shelstad: IEEE-IAS Annual Meeting, Oct.
(1978).
3) S. Masuda, M. Washizu, A. Mizuno and K.
Akutsu: *ibid.*, Oct. (1978).

参考文献

- 1) M.M. Pauthenier and M. Moreau-Hanot: J.