

## 論 文

## 数珠球形成力の Re-expansion 法による計算

中島 耀二<sup>\*,1</sup>, 松山 達<sup>\*\*</sup>

(2000年12月21日受付; 2001年4月27日受理)

## Calculation of Pearl Chain Forming Force by Re-expansion Method

Yoji NAKAJIMA<sup>\*,1</sup> and Tatsushi MATSUYAMA<sup>\*\*</sup>

(Received December 21, 2000; Accepted April 27, 2001)

The re-expansion method proposed by Washizu has been supposed to be a powerful means to evaluate electrostatic interactions of multi particle systems. This time we apply the method to a single particle chain aligned straightly in the direction of a uniform electric field. The calculated results show that the pearl chain forming force rapidly increases with increasing number of particles and reaches a saturation value for chains consisting of some tens of particles. The force is almost constant in the major part of the particle chain and starts to decrease near the both ends of the chain. But even at the ends of the chain the force is still much stronger than the interaction force of two particles. The present method can be extended to cases of coated particles to give new models of ER particles. For instance, surface roughness of ER particles has been modeled by a minute interstice between particles. But the indeterminate size of the interstice in the model sensitively affects the force and yields intolerable uncertainty in the force calculation. A coated particle model, in which the surface roughness is replaced with an equivalent surface layer, may provide a reasonable method for the force calculation.

## 1. はじめに

絶縁液体中の一様電界で絶縁体の均一球が直線状に並んだときに粒子に作用する静電気力(数珠球形成力)はER液体との関連で興味がもたれてきた。この計算に対しいわゆる point dipole 近似<sup>1)</sup>が無効であることが明らかになっており、2個粒子<sup>2)</sup>あるいは無限個粒子<sup>3)</sup>の場合に對して高精度の計算法が提案されている。しかし数珠球形成力の粒子数依存性や、直鎖端部の力の変化については明らかにされていない。筆者らは Washizu ら<sup>4)</sup>が提案した電位分布の re-expansion 法がこの目的の計算に非常に有効であることを見出した。更に、re-expansion 法では粒子が同心球構造をなす場合も容易に扱えることを利用

して、ER 粒子の静電応力の計算を目指した被覆粒子モデルを検討したので合わせて報告する。

## 2. 電位分布の計算原理

同一の球形粒子(同心球状の多層構造でもよい)が一様な外部電界の方向に等間隔で一直線に並んだ場合を考える。粒子列を構成する粒子個数が偶数個の場合と奇数個の場合で電位 0 の基準点(粒子列の中心点)の取り方が違うため、取り扱いが多少異なる。粒子列の一端が外部電界をかける目的の平板電極に接触している場合には電気映像により計算上の粒子個数は必ず偶数になるので、本報では偶数個の場合だけを述べる。

## 2.1 軸対称電位分布の re-expansion 公式

図1のように、軸対称球座標( $r, \theta$ )の原点Aから $\theta=0$ の方向に距離 $S$ だけ離れた点Bを原点にする座標系を( $r', \theta'$ )とする。A点の周りで表現された軸対称電位分布式をB点の周りの座標で表す時には(1), (2)式を、逆の場合は(3), (4)式を利用する。(非対称性に注意)

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta) = \left(\frac{1}{S}\right)^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j! k!} \left(\frac{-r'}{S}\right)^j P_j(\cos\theta') \quad (1)$$

キーワード：数珠球形成力、高次分極力、電気粘性(ER)流体、re-expansion 法

\* 北海道大学大学院工学研究科物質工学専攻  
(060-8628 札幌市北区北13西8)

Division of Materials Science and Engineering,  
Graduate School of Engineering, Hokkaido University,  
Kitaku, Sapporo 060-8628, Japan

<sup>1</sup> yoji@eng.hokudai.ac.jp

\*\*創価大学工学部生物工学科

(192-8577 東京都八王子市丹木町 1-236)  
Faculty of Engineering, Soka University  
1-236 Tangi-cho, Hachioji, Tokyo 192-8577, Japan

$$r^k P_k(\cos\theta) = S^k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)! j!} \left(\frac{r'}{S}\right)^j P_j(\cos\theta') \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{r'}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta') = (-1)^k \left(\frac{1}{S}\right)^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j! k!} \left(\frac{r}{S}\right)^j P_j(\cos\theta) \quad (3)$$

$$r'^k P_k(\cos\theta') = (-S)^k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)! j!} \left(\frac{-r}{S}\right)^j P_j(\cos\theta) \quad (4)$$

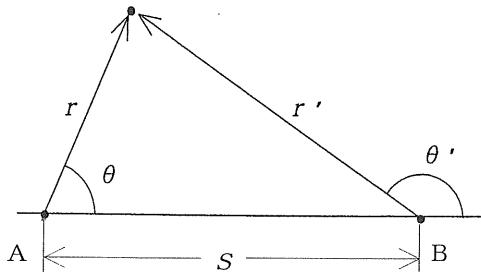


図1 同一点を示す二つの球座標系

Fig.1 Two spherical coordinates expressing an identical point in space.

(1), (3)式は  $r' < S$  あるいは  $r < S$  を前提に誘導されているが、後述の計算では B または A を中心とする  $S$  より小さな半径の球面上で(1), (3)式が成立すればよいのでこの前提は常に満足できる。なおA点は(1)式の特異点なのでA点の周りで展開した(4)式を(1)式の右辺に代入しても(1)式は成立しない。(3)式と(2)式の関係も同様である。

## 2.2 粒子列の外側の電位分布

図2のように等しい間隔  $S_0$  で並んだ半径  $R$  の  $2N$  個の粒子に、左端より  $-N \sim N$  の番号を付ける。粒子数を偶数としたので0番粒子は欠番になる。一様な強度  $E_0$  の外部電界が左から右へ、粒子列の中心線に平行に作用している。この系では正負の粒子番号について電気映像の関係があるので、正の粒子番号だけについて考察する。

この平等電界による電位分布を粒子列の中心を電位0

の基準点とし、そこを原点にして表せば次式になる。

$$\phi_E = -E_0 z = -E_0 r_0 \cos\theta_0 = -E_0 r_0 P_1(\cos\theta_0) \quad (5)$$

これを基準点の右側にある第  $n$  番 ( $N \geq n \geq 1$ ) 粒子の中心を原点に取り直せば(2)式より

$$\phi_E = -\left(n - \frac{1}{2}\right) S_0 E_0 P_0(\cos\theta_n) - E_0 r_n P_1(\cos\theta_n) \quad (6)$$

ここで  $R$  は球の半径、 $P_k$  は  $k$  次の Legendre 多項式、 $(r_0, \theta_0)$  は基準点周りの球座標、 $(r_n, \theta_n)$  は  $n$  番粒子の中心を原点にした球座標である。これに  $n$  番粒子の周りの軸対称電位分布に関する一般形を付け加えると、 $n$  番粒子の表面近傍の外部空間における任意の軸対称電位分布が  $n$  番粒子の中心を原点にした表現で得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{no} = & -\left(n - \frac{1}{2}\right) S_0 E_0 P_0(\cos\theta_n) - E_0 r_n P_1(\cos\theta_n) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ a_n(j) \left(\frac{R}{r_n}\right)^{j+1} + b_n(j) \left(\frac{r_n}{R}\right)^j \right\} P_j(\cos\theta_n) \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式の  $a_n(j)$  項は  $n$  番粒子自身の電荷の寄与である。

$b_n(j)$  項は  $n$  番粒子以外の電荷の寄与を与える<sup>3-7)</sup>。この項に平等電界に基づく右辺の最初の2項を含めることもできるが、ここでは  $n$  番粒子以外の粒子の電荷の寄与だけを独立させて表した。 $b_n(j)$  項は他の粒子の  $a_m(j)$  項の寄与を  $n$  番粒子の周りで re-expand した項であると解釈できるので  $b_n(j)$  は  $(R/S_0)^j$  を含んでおり、(7)式は  $r_n \geq R$  の領域でも  $n$  番粒子の表面近傍では確実に収束する。

$n$  番粒子の右側にある  $m$  番粒子 ( $m > n > 0$ ) の分極電荷の空間電位への寄与は

$$\phi_R = \sum_{k=0}^{\infty} a_m(k) \left(\frac{R}{r_m}\right)^{k+1} P_k(\cos\theta_m) \quad (8)$$

と表せるが、これを  $n$  番粒子の中心を原点とする座標系での表現に直せば、(3)式を用いて

$$\begin{aligned} \phi_R = & \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{R}{S_{mn}}\right)^{j+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-R}{S_{mn}}\right)^k \frac{(j+k)!}{j! k!} a_m(k) \right\} \\ & \times \left(\frac{r_n}{R}\right)^j P_j(\cos\theta_n) \end{aligned} \quad (9)$$

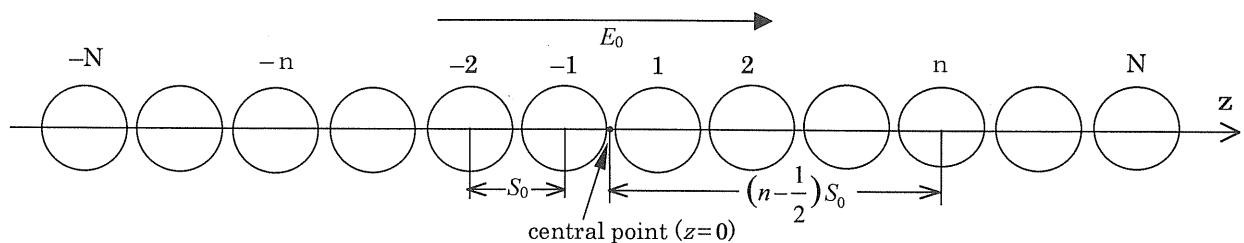


図2 直線状の粒子列と粒子番号

Fig.2 Particle alignment and particle number.

同様に n 番粒子より左側の粒子の寄与は

$$\phi_L = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{-R}{S_{mn}} \right)^j \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{R}{S_{mn}} \right)^{k+1} \frac{(j+k)!}{j! k!} a_m(k) \right\} \times \left( \frac{r_n}{R} \right)^j P_j(\cos \theta_n) \quad (10)$$

ここで  $S_{mn}$  は m 番粒子と n 番粒子の中心間距離である。m が負のときは第 0 番粒子がないことに注意して

$$\begin{aligned} S_{mn} &= (n-m-1)S_0 \quad \text{for } -N \leq m < 0, 0 < n \leq N \\ S_{mn} &= (n-m)S_0 \quad \text{for } 0 < m < n \leq N \\ S_{mn} &= (m-n)S_0 \quad \text{for } 0 < n < m \leq N \end{aligned} \quad (11)$$

また、基準点 ( $z=0$ ) を通る軸に垂直な平面に関して電位分布は電気映像の関係にあるので

$$a_{-m}(j) = (-1)^{j+1} a_m(j) \quad (12)$$

なる関係もある。n 番粒子以外の分極電荷が n 番粒子の周りの電位に及ぼす寄与を (9)～(12) 式を用いて計算し、(7) 式と比較すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} b_n(j) &= \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{-R}{(n-m)S_0} \right)^j \left( \frac{R}{(n-m)S_0} \right)^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{-R}{(n+m-1)S_0} \right)^{j+k+1} \right\} \frac{(j+k)!}{j! k!} a_m(k) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{-R}{(2n-1)S_0} \right\}^{j+k+1} \frac{(j+k)!}{j! k!} a_n(k) \quad (13) \\ &\quad + \sum_{m=n+1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left( \frac{-R}{(m-n)S_0} \right)^k \left( \frac{R}{(m-n)S_0} \right)^{j+1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{-R}{(m+n-1)S_0} \right)^{j+k+1} \right\} \frac{(j+k)!}{j! k!} a_m(k) \end{aligned}$$

ここで総和の上限が下限より小さくなる項は 0 とする。

### 2.3 粒子界面の境界条件

粒子列の中の粒子はすべて同一で、図 3 に示すような、外径  $R$ 、内径  $R_c$  の被覆粒子構造をもつものとする。球外の誘電率は  $\epsilon_m$ 、被覆層では  $\epsilon_s$ 、芯部は  $\epsilon_c$  であるとする。球外、被覆層、芯部の電位分布を (14)～(16) 式で表す。

$$\phi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ a(j) \left( \frac{R}{r} \right)^{j+1} + b'(j) \left( \frac{r}{R} \right)^j \right\} P_j(\cos \theta) \quad (14)$$

$$\phi_s = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ c(j) \left( \frac{R_c}{r} \right)^{j+1} + d(j) \left( \frac{r}{R_c} \right)^j \right\} P_j(\cos \theta) \quad (15)$$

$$\phi_c = \sum_{j=0}^{\infty} e(j) \left( \frac{r}{R_c} \right)^j P_j(\cos \theta) \quad (16)$$

2 つの界面での電位および電束密度の連続性を使うと  $a(j) \sim e(j)$  の係数ベクトルのうち 4 個が消去できる。式を短く表現する都合上

$$K_s = \epsilon_s / \epsilon_m, \quad K_c = \epsilon_c / \epsilon_m \quad (17)$$

$$f(j) = \left( K_c - K_s \right) \left( \frac{R_c}{R} \right)^{j+1} - \left( K_c + \frac{j+1}{j} K_s \right) \left( \frac{R}{R_c} \right)^j \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g(j) &= (K_s - 1) \{ K_s + j(K_s + K_c) \} (R/R_c)^j \\ &\quad + (K_c - K_s) \{ j + (j+1)K_s \} (R_c/R)^{j+1} \end{aligned} \quad (19)$$

とおく。 $K_s, K_c$  は媒体の誘電率に対する比であるので、以降、相対誘電率と呼ぶことにする。 $j \geq 1$  に対して

$$b'(j) = \left\{ (2j+1) \frac{f(j)}{g(j)} - 1 \right\} a(j) \quad (20)$$

$$c(j) = \frac{(2j+1)(K_c - K_s)}{g(j)} a(j) \quad (21)$$

$$d(j) = - \frac{(2j+1) \left( K_c + \frac{j+1}{j} K_s \right)}{g(j)} a(j) \quad (22)$$

$$e(j) = - \frac{(2j+1)^2 K_s}{j g(j)} a(j) \quad (23)$$

(20)～(23) 式はすべての粒子番号に成り立つ。(14) 式の  $b'(j)$  には(7)式の  $b_n(j)$  で除外した一様電界の項も含むので、(20) 式の係数  $b'(j)$  は  $j \leq 1$  の場合について修正を要する。すなわち(7)と(14)式を比較すると次式になる。

$$\begin{aligned} b_n(1) &= \left\{ (2+1) \frac{f(1)}{g(1)} - 1 \right\} a_n(1) + E_0 R \\ b_n(j) &= \left\{ (2j+1) \frac{f(j)}{g(j)} - 1 \right\} a_n(j) \quad j \geq 2 \end{aligned} \quad (24)$$

これと(13)式を連立させて  $a_n(j)$  について数値的に解くと、(20)～(23) 式により電界計算に必要なすべての係数ベクトルが求められる。その算法については付録で述べる。ここでは単層被覆構造の粒子について計算したが、

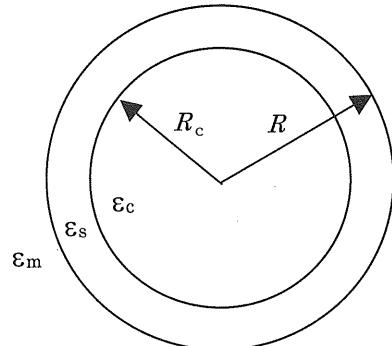


図 3 被覆粒子の構造

Fig.3 Structure of coated particle.

粒子が同心球構造であれば被覆層数によらず(24)式のような  $a_n(j)$  と  $b_n(j)$  の関係式を誘導することができ、(13)式と連立させることにより同様な計算が可能である。なお(13)式は(7)式の収束域 ( $n$  番粒子の表面近傍)でのみ意味を持つが、(24)式は  $n$  番粒子の表面に関する条件式なので(7)式の収束域内にあり、(13)式と連立できる。

### 3. 静電気力の計算

上記の計算で電界が定められれば、図1のように並んだ個々の粒子に作用する静電気力を計算できる。しかし、個々の粒子に作用する力を求め粒子の運動を計算する場合を除けば、そのような計算はあまり意味がない。例えば粒子列が十分に長い場合には大部分の粒子は左右からほぼ同じ静電気力を受けるため、個々の粒子に作用する力は事実上0になると想像される。本報ではそのような力を求めようとするのではなく、ER液体の解析などに重要な粒子列を引きちぎるのに必要な力、つまり力学的に接触した粒子列の粒子接点に働く力を計算する。

粒子番号は図1と同様につけ、図4のように  $n$  番粒子の左側の接点を第  $n$  接点( $n > 0$ )と呼ぶことにする。第  $n$  接点より左側の粒子群をL群、右側をR群とする。この接点に左向きに作用する力は、L群が作る電界とR群の粒子の全分極電荷の相互作用として考えればよい。その相互作用を更に分解するとR群内の  $p$  番粒子の分極電荷にL群内の  $q$  番粒子からの電界が作用する力が基本要素になる。この力  $F_{pq}$  を Washizu ら<sup>5)</sup>が用いた実効多重極法に倣って計算する。

$p$  番粒子の中心を原点とした球座標で粒子外部の電界を(14)式に準じて次式で表す。

$$\phi_{p0} = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ a_p(j) \left( \frac{R}{r} \right)^{j+1} + b_p'(j) \left( \frac{r}{R} \right)^j \right\} P_j(\cos\theta) \quad (25)$$

ここで  $a_p(j)$  の項は  $p$  番粒子の中心に誘導された軸上多重極による電位分布である。  $j$  次の  $z$  軸上多重極の電荷密度はその強度を  $p_j$  とすると次式で与えられる。

$$\rho_j(r) = p_j \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j \delta(r)}{\partial z^j} \quad (26)$$

ここで  $\delta(r)$  は Dirac のデルタ関数で、単位強度の点電荷の空間電荷密度を表す。これが作る電位分布は  $1/4\pi\epsilon_m r$  であるから(26)式の電荷分布が作る電位分布は

$$\phi = \frac{p_j}{4\pi\epsilon_m} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\partial^j}{\partial z^j} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{p_j}{4\pi\epsilon_m} \frac{P_j(\cos\theta)}{r^{j+1}} \quad (27)$$

と書ける<sup>8)</sup>。したがって(25)式の  $a_p(j)$  項で示される電位分布を与えるには

$$p_j = 4\pi\epsilon_m R^{j+1} a_p(j) \quad (28)$$

なる強度の軸上多重極を  $p$  番粒子の中心に置けばよいことがわかる。(26)式に(28)式の  $p_j$  を代入することにより  $p$  番粒子の実効多重極の電荷密度を求める

$$\rho_j(r) = \frac{4\pi\epsilon_m (-1)^j R^{j+1} a_p(j)}{j!} \frac{\partial^j \delta(r)}{\partial z^j} \quad (29)$$

また  $p$  番粒子に作用する外部電界の  $z$  方向成分は(25)式の  $b_p'(j)$  項を軸上で  $z$  方向 ( $\theta=0$ ) に微分して

$$E_z = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j z^{j-1}}{R^j} b_p'(j) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j z^{j-1}}{R^j} b_p'(j) \quad (30)$$

がえられる。実効多重極法では、 $p$  番粒子の分極電荷が外部電界から受ける力は、(29)式の全ての次数の実効多重極全体が(30)式の外部電界から受ける力に等しいと考える。したがって  $p$  番粒子が受ける力は次式になる。

$$F = \iiint_{\text{volume}} E_z \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j(r) dv \quad (31)$$

(31)式はデルタ関数の性質を使うと容易に積分できる<sup>5)</sup>。

$$F = -4\pi\epsilon_m \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) a_p(j) b_p'(j+1) \quad (32)$$

この簡潔な結果は粒子の内部構造に関係なく、軸対称の条件を満足する球形粒子には一般的に成立する。なお2.3節で述べた境界条件から  $a_p(0) = 0$  であることが示せるので、総和は  $j=1$  からとある。re-expansion 法では係数  $a_n(j)$  および  $b_n'(j)$  が直接の未知変数として解かれるので(32)式は大変に使いやすい表現である。

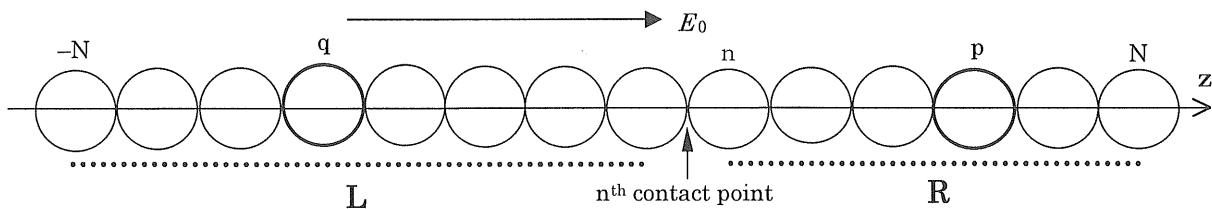


図4 接触した粒子列

Fig.4 Particle array in contact.

$p$  番粒子に  $q$  番粒子の分極電荷が作用する力  $F_{pq}$  を計算するためには(25)式の  $b_p(j)$  項を  $q$  番粒子からの寄与だけに制限しなければならない。それを  $b_{pq}(j)$  とおくと、これは  $q$  番粒子の  $a_q(j)$  項を  $p$  番粒子の中心の周りで re-expand したものであるから

$$b_{pq}(j) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{-R}{S_{pq}} \right)^j \left( \frac{R}{S_{pq}} \right)^{k+1} \frac{(j+k)!}{j! k!} a_q(k) \quad (33)$$

ここでも  $a_q(0)=0$  を使った。したがって

$$F_{pq} = -4\pi \varepsilon_m \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) \left( \frac{-R}{S_{pq}} \right)^{j+1} a_p(j) \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{R}{S_{pq}} \right)^{k+1} \frac{(j+k+1)!}{(j+1)! k!} a_q(k), \quad p > q \quad (34)$$

これより第  $n$  接点に作用する力は

$$F_n = \sum_{q=-N}^{n-1} \sum_{p=n}^N F_{pq} \quad (35)$$

となる。なお(35)式の力の計算では球が力学的に接触していることを前提にしたものなので、それ以外の場合には使えない。したがって(35)式を計算する場合には(11)式の粒子の中心間距離  $S_0$  は  $2R$  に限定される。

#### 4. 計算結果

係数  $a_n(j)$  を求めるための(13)式が2項係数を含んでいるためオーバーフローしやすく、現在のプログラムでは  $j=256$  項までしか計算できない。このため粒子の相対誘電率が大きくなると計算誤差が大きくなる。同じ大きさの2球の場合にはDavis<sup>2)</sup>が報告した収束性の良い方法が使えるので比較したところ、本報の力の計算結果は粒子の相対誘電率(媒体の誘電率  $\varepsilon_m$  に対する比)が  $K_c=40$  の

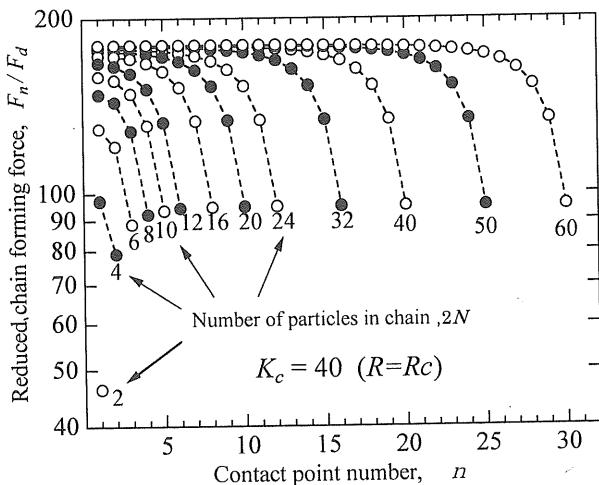


図5 鎖長と端効果

Fig.5 Chain length and end effects.

接触粒子の場合 0.052%,  $K_c=80$  で 1.7%,  $K_c=100$  では 2.9% 低めになった。この誤差は球間の間隙が大きくなれば急速に減少するので、3球以上の場合でも誤差が上記の値を著しく超えることはないと思われる。なおChenら<sup>3)</sup>の無限長連珠の計算は、電界計算は本報と同じであることがわかったが、力の計算に不明瞭な点が含まれていて再計算できない。またFuら<sup>4)</sup>の計算法はきわめて一般的に記述されているが非常に難解で、しかも力の計算法が明確に記述されていないため比較計算できなかった。

#### 4.1 単純球の場合

図5は  $K_c=40$  の単純球についての計算結果である。接点間力  $F_n$  は次式で規格化した。

$$F_d = \frac{3}{2} \pi R^2 \varepsilon_m \left\{ (K_c - 1)/(K_c + 2) \right\}^2 E_0^2 \quad (36)$$

これは接触した2球のpoint dipole近似値である。

粒子数2の場合でさえ接点には  $F_d$  の50倍近い力が働く。このことはすでによく知られた事実である。鎖長が伸びると接点間力は一気に強くなる。構成粒子数が20程度になると中心部( $n=1$ )では  $F_d$  の約180倍に達し、これがほぼ飽和値である。Appendixで述べるが無限長の連珠に対する計算はむしろ簡単で、 $K_c=40$ での飽和値は  $F_d$  の180.2倍であった。

端部での力は端から10個目あたりから弱まりだが、粒子数20以上の長い鎖では最も弱い最端部の結合でも2個粒子の場合の約2倍の強度がある。端効果は鎖長20以上では殆ど同じであって、非常に長い連珠の端効果を知りたい場合でも、粒子数数十で計算すればよい。

#### 4.2 被覆球の場合

粒子列が数10個以上の長さになると中央部の接点間力はほぼ飽和値に達するので、以降では粒子数を無限大にした飽和値だけにつき計算結果を紹介する。なお(36)式は被覆球の場合には意味を持たないが、比較の都合上、ここでもこの値を基準にする。

実際のER粒子は直径数μmの微小な粒子であるので、表面に微細な凹凸があれば理想的な球面接触はできない。このため粒子表面の微細な凹凸に応じた微小な間隙が粒子の接点に存在すると考えて静電気力を評価する間隙モデルがある<sup>3)</sup>。図6の一番下の曲線に、力学的には接觸している  $K_c=40$  の粒子が、電気的には間隙  $G$  を空けて並んでいるとしたときの力を、粒子が理想的な球面接觸しているときの力を1として示した。間隙が粒子半径の僅か4%であっても接点間力は1/10に減少し、しかも間隙の僅かな変動で強く影響を受けることがわかる。このような計算を根拠に、静電気力を精密に計算したところで

実用的には意味がないという批判<sup>10)</sup>は尤もである。

しかし粒子同士が互いに引き合っている以上、粒子の固体部分が力学的に接触しているはずである。したがってその間隙のすべての部分が媒体で満たされていると考えるより、かなりの部分に粒子の構成物質が割り込み接触していると考える方が自然に思える。そこで図3に示したような被覆球モデルで粒子表面の微細な凹凸部を被覆層と見なして計算した。ここでは前述の間隙Gの効果と比較するため各粒子上の被覆層の厚さをG/2として図6に一括してプロットした。

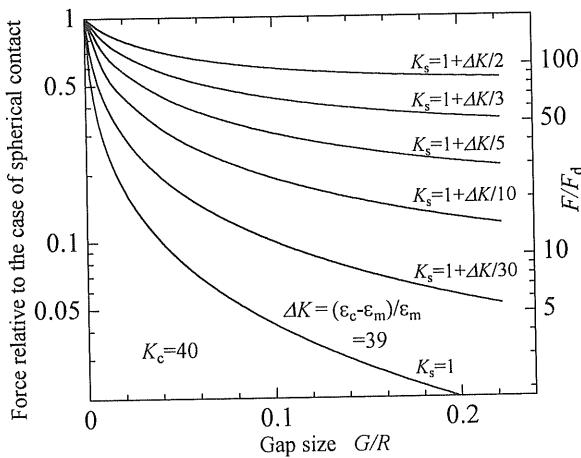


図6 粒子間隙の効果

Fig.6 Effect of gap size between particles.

図6では被覆層(間隙)の相対誘電率 $K_s$ が媒体と同じ場合( $K_s=1$ )から媒体と粒子の平均の場合( $K_s=1+\Delta K/2$ )まで種々に変化した。 $K_s$ が大きくなるにつれ、接点力は球面接触の場合に急速に近づく。もし粒子の接触部の間隙に粒子表面の凹凸が絡み合い、被覆層の実効的な誘電率が媒体と粒子の平均値以上になっているならば、完全な球面接触をしていてもその影響はかなり小さく、かつ $G$ の変動にあまり影響されないことが想像される。したがって被覆球モデルを使えば、間隙モデルのように過敏なパラメータをモデルに含めることなく、ER粒子の実際的なモデルを構築できる可能性がある。

最近、ER粒子として多層被覆粒子<sup>11)</sup>の使用が提案されている。すでにFuら<sup>9)</sup>はそのような場合の計算法を提案しているが、あまりにも一般的な表現のため、彼ら自身が述べているように計算は大変に面倒である。これに対しre-expansion法を利用した本報の手法によれば、粒子の構造で定まる(20)式に応じて(24)式を修正するだけで多層被覆粒子の計算に容易に応用できる。ここでは単層被覆粒子の場合の簡単な計算例を述べる。

誘電率が高い粒子を使うとER粒子の接点間力は強く

なる。しかしその場合、接点付近の電界が非常に高まり、媒体の絶縁破壊が起こりえる。これを防止するため粒子を誘電率の比較的低い絶縁膜で覆い、粒子接点近傍の電界を弱める必要がある。この際、一定の最大電界強度の下で接点間力を最大にするような粒子構造を決めたい。図7は粒子の周りの最大電界強度を印加電界 $E_0$ の300倍に制限したとき、 $K_c=40$ の粒子を厚さ $T$ 、相対誘電率 $K_s$ の皮膜で覆う場合を計算した結果である。この図によれば皮膜の誘電率を低くし、膜厚を薄くすれば同じ最大電界強度でも接点間力が若干大きくできることがわかる。

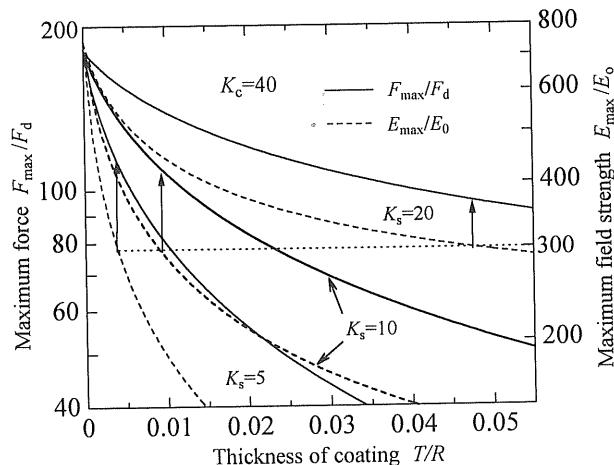


図7 被覆粒子の周りの最大電界と接点力

Fig.7 Maximum field strength and contact force for coated particles.

しかしその効果はあまり大きくないばかりでなく、極端に薄い皮膜は製作上の困難を伴なうであろうから実用的でない。この例ではたぶん $K_s=10$ 程度の物質で半径の1%程度の厚さに被覆するのが良いであろう。実際にこのような考察を行うためにはER粒子の周りの液中絶縁破壊に関する知見などの関連情報が必要になるが、本報の計算法がこのような粒子設計の計算を支援できるものと期待している。

## 5. 結 言

re-expansion法によると電界方向に並んだ粒子間の相互作用が比較的簡単に計算できる。従来の計算法は、個々の粒子に働く力を計算しているのか、あるいは接触した連珠の接点に働く力を計算しているのか曖昧であったが、ここでは接点粒子の接点力を計算した。

粒子間接点力の粒子数依存性は、粒子数が少ないうちには急激に増加するが数十個の鎖長で飽和に達する。この計算は粒子数が大きくなるほど時間がかかるため、今回の計算では粒子数80で打ち切ったが、粒子数が20以上では端効果が殆ど同じであることがわかった。また粒子

数が無限大の場合どの粒子も同じ分極状態になるので計算はかえって簡単に実行できる。したがって、無限連珠の計算結果に粒子数数十個の端部の結果を継ぎ足せば、任意の長さの連珠について計算できることになる。

本報の計算方法は粒子が同心球構造の多層被覆粒子である場合にも容易に拡張できる。ここでは単層の被覆球を例に、ER 粒子の静電応力計算への応用を試みた。従来の計算では粒子の表面粗さに基づく不完全な接触状態の効果を算入するために、粒子の接触部に間隙を想定しているが、間隙サイズの不確定性に基づく曖昧さが問題になる。これに対し被覆球モデルを使うと、この問題をかなり緩和できそうである。また、将来、絶縁液中の微粒子の周りでの絶縁破壊などの関連問題がうまく処理できれば、近年提案されている多層被覆構造の ER 粒子の設計にも応用できる。

## Appendix

本報で報告した計算法はとても厄介に見えるが、IMSL などの汎用ライブラリーを使うとプログラミングは予想外に簡単である。ただ、粒子数が有限個の連珠の場合の計算では多量のメモリーが必要になる。（筆者の計算では粒子数 80 個の場合に 512MB 必要であった。）これに対し粒子数が無限個の場合はむしろ容易で、標準的なパソコンで計算可能である。

まず、(13)式と(24)式を等値して  $b_n(j)$  を消去し、 $a_m(j)$ ,  $a_n(j)$  を含むすべての項を左辺に集める。Legendre 多項式の次数  $j$  をある最大値  $J$  で打ち切るなら、(12)式の電気映像関係を考慮すると、未知数の個数は総数  $2N$  の粒子列に対して  $JN$  個になる。これを列ベクトル  $\mathbf{X}$  で表す。一方、(24)式の右辺に残る  $a_n(j)$  を含まぬ項は定数ベクトル  $\mathbf{B}$  で表わす。

$$\mathbf{X} = \{a_1(1), a_1(2), \dots, a_1(J), a_2(1), \dots, a_2(J), \dots, a_N(1), a_N(2), \dots, a_N(J)\}^T \quad (A1)$$

$$\mathbf{B} = \{E_0 R, 0, 0, \dots, 0, E_0 R, 0, 0, \dots, 0, \dots, E_0 R, 0, 0, \dots, 0\}^T \quad (A2)$$

ここで記号  $T$  は転置を表す。この操作により(13), (24)式の連立方程式は次の形にまとめられる。

$$\left| \begin{array}{cccc} \mathbf{M}_{1,1} & \mathbf{M}_{1,2} & \cdots & \mathbf{M}_{1,N} \\ \mathbf{M}_{2,1} & \mathbf{M}_{2,2} & \cdots & \mathbf{M}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{N,1} & \mathbf{M}_{N,2} & \cdots & \mathbf{M}_{N,N} \end{array} \right| \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (A3)$$

ここで小行列  $\mathbf{M}_{m,n}$  は  $J$  行  $J$  列の正方行列であり、それぞれの  $j$  行  $k$  列要素は

$$\begin{aligned} M_{m,n}(j, k) &= \left\{ \left( \frac{-R}{(n-m)S_0} \right)^k \left( \frac{R}{(n-m)S_0} \right)^{j+1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{-R}{(m+n-1)S_0} \right)^{j+k+1} \right\} \frac{(j+k)!}{j! k!}, \quad n > m > 0 \\ M_{m,n}(j, k) &= \left( \frac{-R}{(2n-1)S_0} \right)^{j+k+1} \frac{(j+k)!}{j! k!} - D(j, k), \quad m = n > 0 \\ D(j, j) &= (2j+1) \frac{f(j)}{g(j)} - 1, \quad D(j, k) = 0 \quad \text{for } j \neq k \\ M_{m,n}(j, k) &= \left\{ \left( \frac{-R}{(m-n)S_0} \right)^j \left( \frac{R}{(m-n)S_0} \right)^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{-R}{(m+n-1)S_0} \right)^{j+k+1} \right\} \frac{(j+k)!}{j! k!}, \quad m > n > 0 \end{aligned} \quad (A4)$$

で与えられる。(A3)式を  $\mathbf{X}$  について数値的に解けば(34)式から個々の粒子間の静電気力が求められる。(A3)式は対称行列であるのでその特徴を生かした数値解法を使うとよい。なお(35)式の力の計算では粒子が接触している場合を想定しているので  $S_0=2R$  の場合に限られる。

無限長の粒子列に対しては、 $a_n(j)$  が粒子番号  $n$  に無関係になり、かつ偶数次の  $j$  については  $a_n(j)=0$  であるので<sup>3)</sup>、有限長の場合の計算に比べてはるかに簡単になる。すなわちベクトル  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{B}$  は最初の  $J$  個の要素のみを残し、他は捨てる。係数行列は(A3)の最上段の和をとり、

$$\mathbf{M} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{M}_{1,n} \quad (A5)$$

とする。この無限級数和は容易に収束する。更に  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{B}$  からは偶数行を外し、 $\mathbf{M}$  からは偶数の行と列を外す。その上で  $\mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{B}$  を数値的に解く。この際、行列  $\mathbf{M}$  はもはや対称でないことに注意しなければならない。

## 参考文献

- 1) G. Zebel : Staub, **23** (1963) 263
- 2) M.H.Davis : Am. J. Phys., **37** (1969) 26
- 3) Y. Chen, A. F. Sprecher and H. Conrad : J. Appl. Phys., **70** (1991) 6796
- 4) M. Washizu and T.B. Jones : IEEE Trans. IA, **32** (1996) 233
- 5) M. Washizu and T.B. Jones : J. Electrostat., **33** (1994) 187
- 6) L. Rayleigh : Philos. Mag. Ser. 5, **34** (1892) 481
- 7) J.Lam : J.Appl.Phys., **60** (1986) 4230
- 8) J.A.Stratton : *Electromagnetic Theory*, p.172, McGraw-Hill, New York (1941)
- 9) L. Fu and L. Resca : Solid State Commun., **99** (1996) 83
- 10) 滝本淳一 : 静電気学会誌, **24** (2000) 298
- 11) C.W. Wu and H. Conrad : J. Phys. D: Appl. Phys., **31** (1998) 3312