

## 論 文

# 電荷重畠法における仮想電荷と輪郭点の 極座標系での自動配置

西 村 亮\*,<sup>1</sup>, 西 守 克 己\*, 石 原 永 伯\*

(2000年2月3日受付, 2000年7月19日受理)

## Automatic Arrangement of Fictitious Charges and Contour Points in Charge Simulation Method for Polar Coordinate System

Ryo NISHIMURA,\*<sup>1</sup> Katsumi NISHIMORI\* and Naganori ISHIHARA\*

(Received February 3, 2000; Accepted July 19, 2000)

In this paper, we use genetic algorithms (GA) to decide an appropriate arrangement of both fictitious charges and contour points in charge simulation method (CSM) for 2-D electrode system with asymmetrical structure. We calculated the potential distribution around two cylindrical electrodes with different sizes above a grounded plate electrode. We describe the  $r$ - and  $\theta$ -components of the charge positions and the  $\theta$ -components of the contour-point positions as genes. First, we placed fictitious line-charges and contour points at random inside the electrodes and on the surface of electrodes, respectively. The arrangement was adjusted automatically by using GA for 1000 generations. The maximum error in the calculated potentials over the whole surface of the electrodes is found to be about 0.02%. We also show that by removing the constrained conditions tentatively used in the previous paper for the positions of the fictitious charges and the contour points, the accuracy of the potential calculation can be much improved although a slightly longer convergence time is required.

### 1. はじめに

電極がつくる空間電位分布を計算する方法の一つに電荷重畠法がある。この方法を用いて精度のよい計算を行うためには、電極内部に配置する仮想電荷および電極表面上の輪郭点の適切な配置が必要である。しかし、電極の形状が複雑になると仮想電荷および輪郭点の個数が増大し、それにともなってこれらを「配置する手間」が増大する。著者らはこれまでに回転楕円体電極の回転軸上に点電荷を(1次元的に)配置して電極電位を模擬する問題に対し、遺伝的アルゴリズム(Genetic Algorithms, GA)を用いることによって適切な仮想電荷の配置を自動的に決定できることを示した<sup>1)</sup>。また、2つの無限長円筒電極からなる電極系に対し、各電極の半径上に無限長線電荷を

配置する問題をあつかい、2次元非対称問題に対する仮想電荷と輪郭点の配置決定を行った<sup>2)</sup>。しかし、文献2では個々の仮想電荷の座標をそれぞれの電極の中心を原点とした極座標で表現する際に、 $r$ 座標はGAで決定したが $\theta$ 座標は固定して致死遺伝子の発生を抑え、探索効率の低下を防止した。また同様な理由により、個々の輪郭点が存在できる範囲を限定した。今回はそれらの制限を取り除き、各電極内の仮想電荷の $r$ 座標と $\theta$ 座標の両方をGAで決定してみたところ、致死遺伝子の発生や探索効率の低下は致命的な障害にならず、かつ計算精度に大幅な改善が見られたので、本報ではここに提案する方式が仮想電荷の適切な2次元配置にいっそう有効な方法であることを示す。

### 2. 計算モデル

計算対象となる電極は図1に示すように、2つの無限長円筒電極を平行に配置した2次元非対称電極系である。2つの電極には合計で $N$ 個の仮想電荷および輪郭点が存在し、1個の仮想電荷の $r$ 座標を $a$ ビット、 $\theta$ 座標を $b$ ビット、輪郭点の $\theta$ 座標を $c$ ビットの遺伝子で表現する。この場合、電極系全体の染色体の長さは $(a+b+c) \times N$ ビットとなり、図2に示すような構造をもつものとする。

**キーワード:** 電界計算、電荷重畠法、遺伝的アルゴリズム、仮想電荷配置、配置問題

\*鳥取大学工学部電気電子工学科 (680-8552 鳥取県鳥取市湖山町南 4-101)

Electrical and Electronic Engineering, Tottori University,  
4-101, Koyama-minami, Tottori 680-8552, Japan

<sup>1</sup> ryo@ele.tottori-u.ac.jp

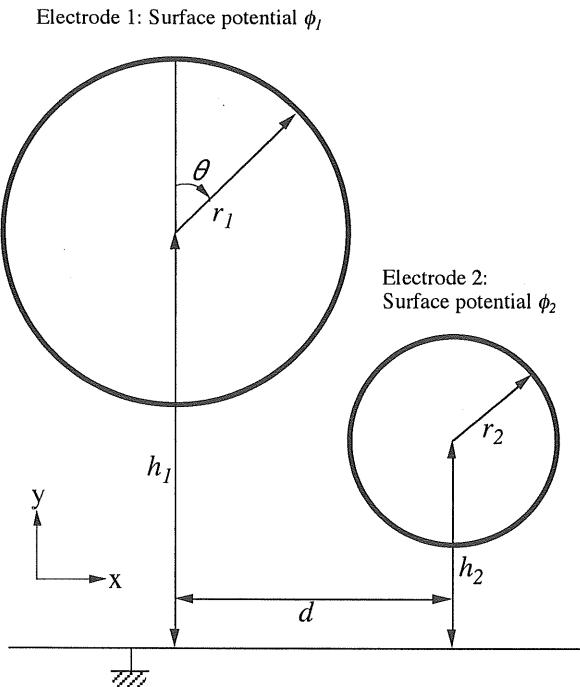


図1 無限長円柱電極系（計算対象）

Fig. 1 Two cylindrical electrodes with infinite length.

各電極に配置される仮想電荷および輪郭点の座標は、それぞれの電極の中心を基準とする極座標を用いて表現する。今回の計算では、個々の仮想電荷および輪郭点が、電極内部および電極表面（輪郭）上のまったく任意な点に存在することができるよう、以下のように染色体から電荷および輪郭点座標への変換（デコード）を行う。

電極  $i$  ( $i = 1, 2$ ) の半径を  $r_i$  とすると、その電極に配置される各仮想電荷は区間  $(0, r_i)$  の範囲に存在する。1 個の電荷の座標の  $r$  成分を以下の式で与える。

$$r = \Delta r (g_{r_{FC}} + 1) \quad (1)$$

$$\Delta r = r_i / (2^a + 1) \quad (2)$$

ここで、 $g_{r_{FC}}$ ：電荷位置の  $r$  成分に対応するビット列（図2の  $r_{FC,1} \sim r_{FC,N}$ ）を10進数に変換した値 ( $0 \leq g_{r_{FC}} \leq 2^a - 1$ )

1 個の電荷の座標の  $\theta$  成分  $\theta_{FC}$  を以下の式で与える。

$$\theta_{FC} = \Delta\theta_{FC} g_{\theta_{FC}} \quad (3)$$

$$\Delta\theta_{FC} = 2\pi / 2^b \quad (4)$$

ここで、 $g_{\theta_{FC}}$ ：電荷位置の  $\theta$  成分に対応するビット列（図2の  $\theta_{FC,1} \sim \theta_{FC,N}$ ）を10進数に変換した値 ( $0 \leq g_{\theta_{FC}} \leq 2^b - 1$ )

それぞれの輪郭点を配置する角度  $\theta_{CP}$  を以下の式で与える。

$$\theta_{CP} = \Delta\theta_{CP} g_{\theta_{CP}} \quad (5)$$

$$\Delta\theta_{CP} = 2\pi / 2^c \quad (6)$$

ここで、 $g_{\theta_{CP}}$ ：電荷位置の  $\theta$  成分に対応するビット列（図2の  $\theta_{CP,1} \sim \theta_{CP,N}$ ）を10進数に変換した値 ( $0 \leq g_{\theta_{CP}} \leq 2^c - 1$ )

ここで定義した変換方法を用いる場合、たとえば図2において  $J$  番目と  $K$  番目の輪郭点の座標を表す  $\theta_{CP,J}$  と  $\theta_{CP,K}$  を入れ替えるても物理的には同じ状態を示すので、1つの表現型（仮想電荷・輪郭点配置状況）に対し、複数の遺伝子型（染色体の内部構造）が存在する。したがって、表現型と遺伝子型が1対1対応する場合と比較して探索効率が低下するおそれがあるが、今回はこの不都合は無視する。また、複数の電荷（もしくは輪郭点）が同一の座標を占める可能性があり、この場合には電荷重畠法としての計算が行えなくなる。したがってそのような染色体（致死遺伝子を含む染色体）には対応する表現型が存在しない。致死遺伝子を含む染色体の検出は連立1次方程式における特異な係数行列の検出で行った。（Appendix 参照）

### 3. 計算

#### 3.1 計算手順および条件

10個の親個体が総当たり的につがいをつくり、1組が10個の個体を産む。親と子の合計460個体をデコードし、それぞれの個体に対し仮想電荷の電荷量と輪郭点の電位の関係を表す連立方程式を構成する。この際前章で述べた「致死遺伝子」を持つ個体は「生存していない」ので除去する。残りの個体  $N_L$  個 ( $N_L \leq 460$ ) すべてに対し、次の式で定義する評価値  $\sigma$  を計算する。 $\sigma$  が0に近いほど、目的とする電位分布（電極表面がいたるところで設定値）に近づく。

$r_{FC,1}$	$r_{FC,2}$	$\cdots$	$r_{FC,N}$	$\theta_{FC,1}$	$\theta_{FC,2}$	$\cdots$	$\theta_{FC,N}$	$\theta_{CP,1}$	$\theta_{CP,2}$	$\cdots$	$\theta_{CP,N}$
$r$ -components of fictitious charges ( $a$ [bit] $\times N$ )				$\theta$ -components of fictitious charges ( $b$ [bit] $\times N$ )				$\theta$ -components of contour points ( $c$ [bit] $\times N$ )			

図2 染色体の構造

Fig. 2 Structure of a chromosome.

$$\sigma = \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} |\phi_i(\theta) - \phi_{i0}| d\theta \quad (7)$$

ここで、 $\phi_i(\theta)$ :  $i$  番目の電極の角度  $\theta$  (図1参照)  
での電極表面電位、 $\phi_{i0}$ :  $i$  番目の電極の設定電位

各個体に対して評価値を求め、最小の（最良の）評価値  $\sigma_{min}$  および最大の（最悪の）評価値  $\sigma_{max}$  が得られたとき、それぞれが 1 および 0 となるような 1 次変換を行い、その結果を生存パラメータ  $f$  とする。この生存パラメータを用いて、 $N_L$  個の個体から次の手順<sup>3)</sup>によって 10 個体を選択する。

- (1) 評価値が  $\sigma_{min}$  の個体 ( $f = 1$  の個体) を選択する。
- (2) 次式から「生存している集団」( $N_L$  個) における各個体の生存パラメータの総和を求める。

$$F = \sum_{i=1}^{N_L} f_i \quad (8)$$

ここで、 $f_i$ : 各個体の生存パラメータ

- (3) 各個体の選択確率  $p_i$  を次式により求める。

$$p_i = f_i / F \quad (9)$$

- (4) 累積確率  $q_i$  を次式で計算する。

$$q_i = \sum_{j=1}^i p_j \quad (i = 1, 2, \dots, N_L) \quad (10)$$

- (5) 区間(0,1)の乱数  $s$  を発生させる。累積確率  $q_i$  と  $s$  の大小関係を順番に調べ、関係式

$$q_i < s < q_{i+1} \quad (i = 0, 1, \dots, N_L - 1, q_0 = 0) \quad (11)$$

が満足されたとき、 $i+1$  番目の個体を選択する。このプロセスを 9 回繰り返す。同一個体が複数回選択される可能性もある。なお、手順 (1) によって、各世代の最良の個体は必ず 1 回以上選択される。したがって計算終了時に

表 1 数値条件

Table 1 Numerical conditions.

Radius of electrode 1 $r_1$	5 cm
Radius of electrode 2 $r_2$	3 cm
Height of the center of electrode 1 $h_1$	12 cm
Height of the center of electrode 2 $h_2$	6 cm
Distance in x-direction between the centers of the electrodes $d$	8 cm
Potential of electrode 1 $\phi_{10}$	5 kV
Potential of electrode 2 $\phi_{20}$	3 kV
Number of fictitious charges $n$	10/electrode
Bit length of the $r$ -component of a fictitious-charge position $a$	5 bit/charge
Bit length of the $\theta$ -component of a fictitious-charge position $b$	5 bit/charge
Bit length of the $\theta$ -component of a contour-point position $c$	5 bit/point
Crossover rate $C_v$ [%]	5, 10
Mutation rate $M_t$ [%]	0.1, 0.2, 0.5, 1, 2

得られた最良の個体は、計算全体を通しての最良の個体となる。

初期状態は一様乱数によって発生されたビット列を持つ 10 個の第 0 世代とする。計算は 1000 世代目までおこなう。計算のための数値条件を表 1 に示す。表中の交叉確率  $C_v$  と突然変異発生率  $M_t$  は各遺伝子座（ビットの位置）あたりの値である。交叉および突然変異の具体的な手順は文献 1 を参照されたい。

### 3.2 結 果

種々の交叉確率と突然変異発生率に対する 1000 世代目の評価値  $\sigma$  を表 2 に示す (present method)。比較対象として同じ表に、文献 2 で述べたコーディング手法による、表 1 の数値条件を用いた計算結果を示す (previous method)。今回の研究では「仮想電荷 1 個に対し、 $r$  成分および  $\theta$  成分に各 5 ビットずつ、合計 10 ビット」としているため、文献 2 の手法でも電荷 1 個を 10 ビットとして計算を行い、結果を比較した。どちらの場合も 1 個体の染色体は 300 ビットで表現される。これらの結果より、今回用いたコーディング手法によって、文献 2 の手法と比較して、同じ仮想電荷数で誤差をほぼ 1 行減少させる事が可能である事が確認できる。また、誤差が改善されたため、今回用いた  $r$  座標と  $\theta$  座標の両方をビット列で表すコーディング手法は妥当なものであるといえる。

図 3 に交叉確率 10%，突然変異発生率 0.5% の場合の 1000 世代目の最良個体の電極表面の電位分布を示す ( $\theta$  の取り方は図 1 参照)。各電荷の  $\theta$  座標を固定し、輪郭点の存在範囲を限定する文献 2 の手法では、2 つの電極が接近している部分 (電極 1 では  $m=30 \sim 40$ ) での誤差が顕

表 2 1000 世代目での評価値の最良値  $\sigma_{min}$

Table 2 The best values of the evaluation parameters  $\sigma_{min}$  at the 1000th generation.

Crossover rate and Mutation rate	present method	previous method (Ref. 2)
$C_v = 5\%, M_t = 0.1\%$	$7.5285 \times 10^{-3}$	$6.0488 \times 10^{-2}$
$C_v = 5\%, M_t = 0.2\%$	$1.5532 \times 10^{-3}$	$6.2046 \times 10^{-2}$
$C_v = 5\%, M_t = 0.5\%$	$4.0586 \times 10^{-3}$	$6.2116 \times 10^{-2}$
$C_v = 5\%, M_t = 1\%$	$3.4397 \times 10^{-3}$	$6.0548 \times 10^{-2}$
$C_v = 5\%, M_t = 2\%$	$3.7485 \times 10^{-3}$	$6.1871 \times 10^{-2}$
$C_v = 10\%, M_t = 0.1\%$	$8.9033 \times 10^{-3}$	$6.0300 \times 10^{-2}$
$C_v = 10\%, M_t = 0.2\%$	$2.6045 \times 10^{-3}$	$6.2056 \times 10^{-2}$
$C_v = 10\%, M_t = 0.5\%$	$1.2323 \times 10^{-3}$	$6.0504 \times 10^{-2}$
$C_v = 10\%, M_t = 1\%$	$2.0406 \times 10^{-3}$	$6.0963 \times 10^{-2}$
$C_v = 10\%, M_t = 2\%$	$8.3095 \times 10^{-3}$	$6.0915 \times 10^{-2}$

著である。しかし電荷の  $r$  座標および  $\theta$  座標の両方を G A で決定し、すべての輪郭点が円周（電極輪郭）上の任意の点に存在できる本研究の手法ではこの誤差を非常に小さく抑えることができた。図 3 における本研究の手法を用いた場合の電極電位の相対誤差の最大値は電極 1 (5 kV 電極) で 0.02%，電極 2 (3 kV 電極) で 0.01% 程度であり、十分に実用的な精度であると考えられる。

図 4 に、図 3 の表面電位分布を与える仮想電荷および

輪郭点の配置を示す。図 4(a)において、電極 1 (5 kV) の右下  $1/4$  に仮想電荷が多く集まっている、これが図 3(a)での「2つの電極が接近している部分での誤差」の減少に寄与しているのではないかと思われる。なお、図 4(b)中の「\*」には 2 つの輪郭点が近接した位置に配置されている。また、電荷および輪郭点の適切配置の自由度を調べるために交叉確率 10%，突然変異発生率 0.5% の場合に対し、異なる乱数系列（初期値の異なる乱数）を用いた計算を複数

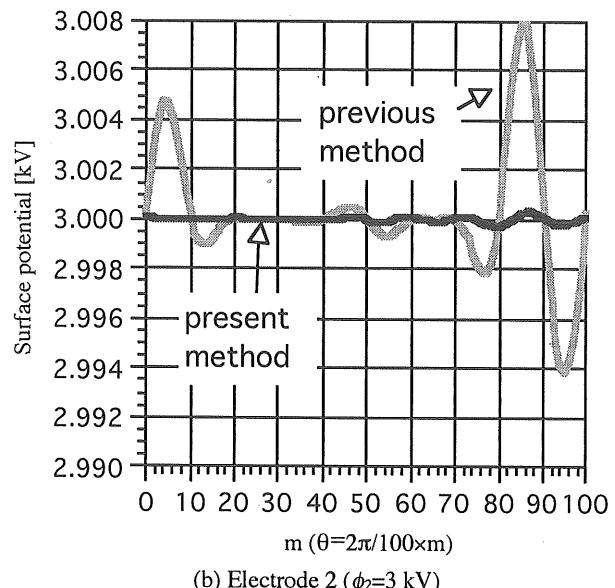
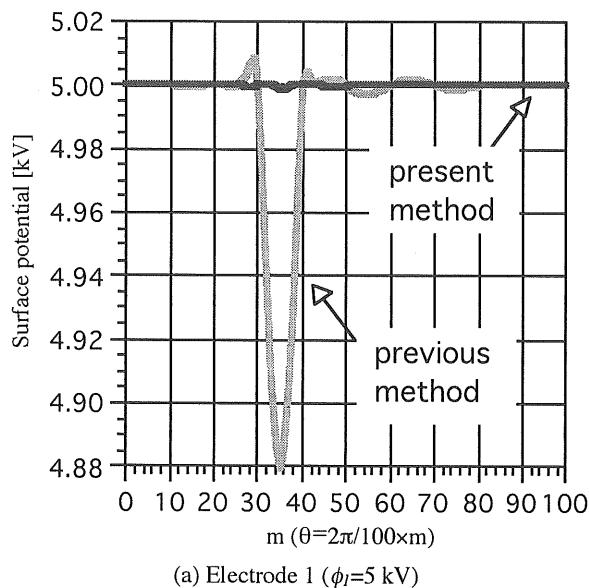


図 3  $C_v=10\%$ ,  $M_t=0.5\%$  の場合の 1000 世代目の電極表面電位

Fig. 3 Surface potentials of electrodes at the 1000th generation for  $C_v=10\%$  and  $M_t=0.5\%$

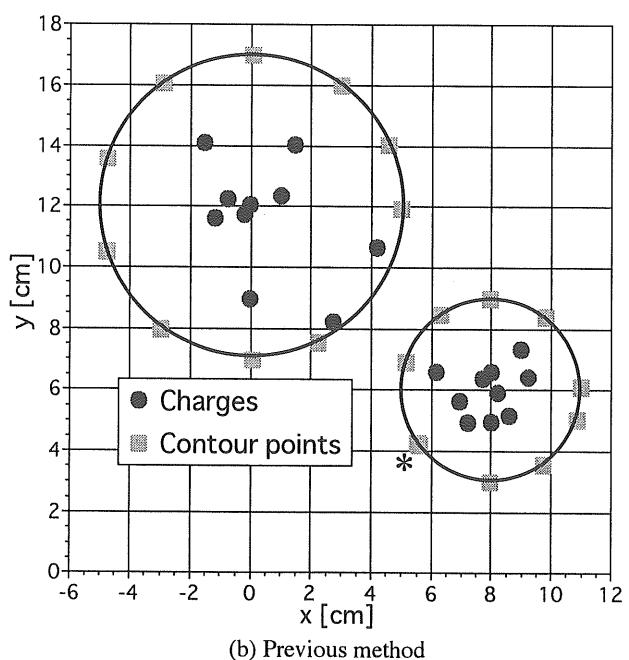
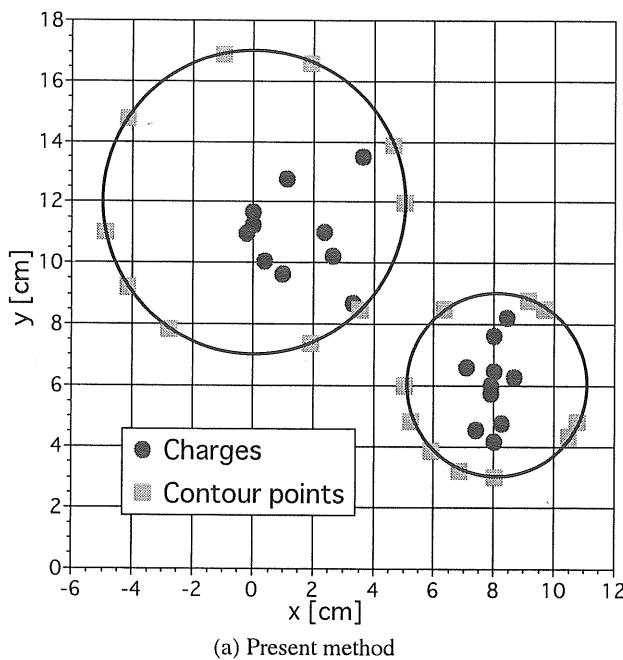
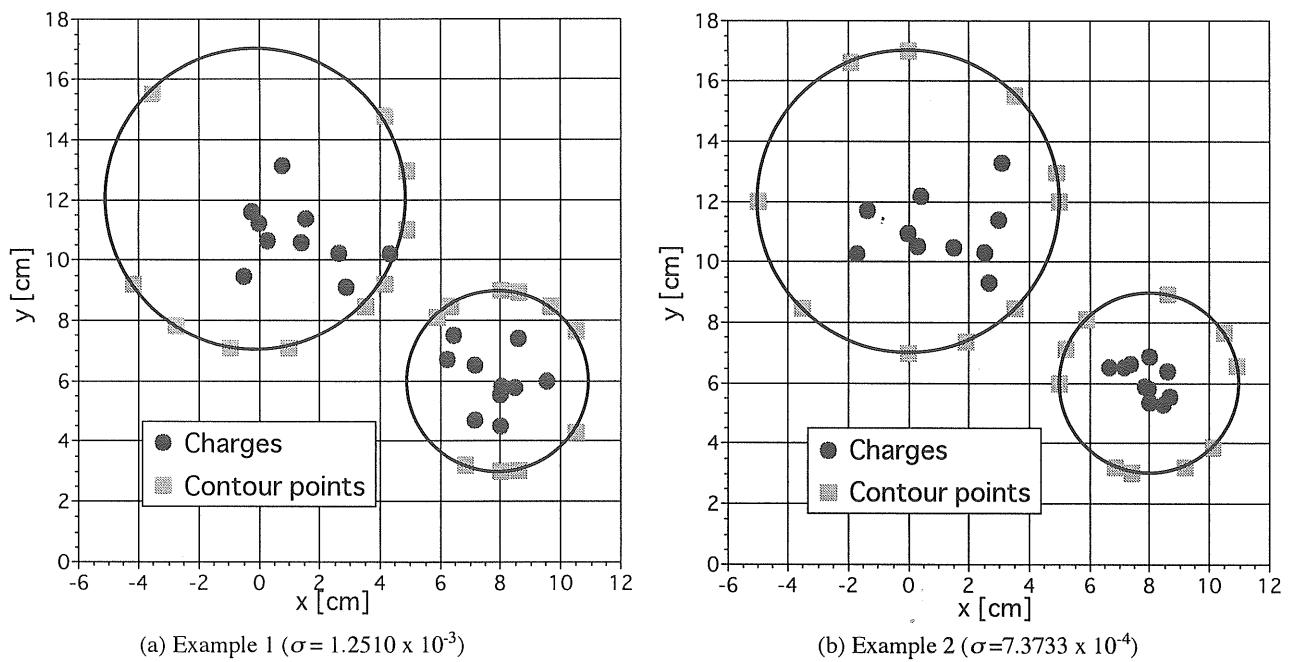


図 4  $C_v=10\%$ ,  $M_t=0.5\%$  の場合の 1000 世代目の仮想電荷および輪郭点配置

Fig. 4 Arrangements of fictitious charges and contour points at the 1000th generation for  $C_v=10\%$  and  $M_t=0.5\%$

図5 良好的な仮想電荷および輪郭点配置の例 ( $C_v=10\%$ ,  $M_f=0.5\%$ )Fig. 5 Examples of appropriate arrangements of fictitious charges and contour points ( $C_v=10\%$  and  $M_f=0.5\%$ )

回行った。図5に、図4(a)以外にも収束時の電極電位の最大相対誤差が電極1で0.02%程度、電極2で0.01%程度の精度が得られる仮想電荷と輪郭点の配置例を $\sigma$ の収束値とあわせて示す。適切な仮想電荷と輪郭点の配置にはばらつきが見られ、かなりの自由度があるようである。しかし仮想電荷に関しては電極1の電荷は右下1/4に多く集まる傾向があるように思われる。

#### 4. 考察とまとめ

電極形状が $r - \theta$ の2次元極座標で表現できる場合に対し、電荷重畠法における仮想電荷の任意な2次元的配置および輪郭点の任意配置が要求される場合のコーディング手法を提案し、その有効性を示した。

本研究では収束状況を調べるために計算終了条件を「1000世代目の終了時」としているが、実際の問題に適用する際は電位の許容誤差が設定されると考えられるので、そのような場合には輪郭点以外の座標に適当に選定したすべての検査点での電位が許容値以下になるまで計算を繰り返せばよい。また、1個の電荷および輪郭点に割り当てるビット数を各5ビットとして計算を行ったが、これにもそれぞれ適切な値を与えることで計算精度が向上する可能性がある。しかし、GAそのものが現在研究途上にある状態であり、このビットの適切な分配、および交叉確率や突然変異発生率、個体集団の数などの適切な値およびその根拠を（情報科学的に）論じることは現時点では困難である。

今回の手法では解は300世代前後で収束した。遺伝子型と表現型が1対1対応し、なおかつ致死遺伝子が発生しないコーディング手法を開発することで収束がこれよりも早まることが期待できる。

本研究では個体（電極電位分布）の評価値を単純に「設定電位との絶対誤差の積分値（総和）」で表現したが、電極上で電位を特に厳密に計算する必要がある領域が存在する場合、そこでの誤差に重みをつけるような評価値を定義することで厳密な計算が可能となる。

図4(a)および図5から、適切な仮想電荷と輪郭点の配置にはかなりの自由度があるようである。このことから、個体の評価値 $\sigma$ （もしくは生存パラメータ $f$ ）は探索空間において非常に多くの極値（「適切な配置」の候補）をもつ関数であると考えられる。また、本研究における評価値 $\sigma$ には「電極表面における電位のばらつき（偏差）」を考慮していない。そのため、電極表面のある狭い領域における誤差が大きくなってしまっても、他の領域で誤差が十分小さければ全体として $\sigma$ の値が小さくなる場合があり得る。そこで、各個体に表面電位のばらつきの大きさに応じてペナルティーを与えるような（ $\sigma$ を大きくするような）評価値を定義することで、上記のような「 $\sigma$ は小さいが良好な配置とは言い難い個体」を解の候補から外す（極値の数を減らす）ことができると考えられる。

座標系として今回は2次元極座標を想定したが、直交座標系および電荷の3次元的な配置が要求される問題に対しても、今回と同様に、座標系の各成分をビット列で表

すコーディングによって適切な仮想電荷および輪郭点の配置が可能であると考えられる。換言すれば、仮想電荷が存在する可能性のある領域を数式で表現することができれば GAによる配置決定が可能であると考えられる。

本研究で示した手法によって、同一の電荷数で、文献2で示した方法よりも良好な結果を得ることができた。このことはコンピュータのメモリ使用量を節約して精度のよい計算が行えることを意味する。したがって、電極形状が複雑になり、多数の仮想電荷が要求される問題に対して本研究のコーディング手法は特に有効であると思われる。

デカルト座標系を用いる場合は取り扱う電極の形状などが多角形もしくは多面体となることが考えられる。この場合、「電極の角」には輪郭点を配置できないため、「曲率半径の小さい弧（または球面の一部）」として表現する必要があり、コーディングにおけるこの部分の取り扱い（輪郭点の配置、評価値の設定）を工夫する必要がある。

その他の今後の研究課題を以下に示す。

#### (1) 電極系における電荷の適切な分配。

本研究では2つの電極に対し、仮想電荷を10個ずつ配置した。電極が複数存在する場合には、全体での電荷の総数を与えて、各電極に適切な数の電荷を分配することにより、計算精度が向上することが期待できる。

#### (2) 接地面が平面以外の場合の計算

#### (3) 空間に誘電率の分布がある場合

本研究では接地面を平面と仮定し、真空の誘電率を仮定しているため、鏡像電荷を用いて計算を行っている。これらの仮定が成り立たない場合には鏡像電荷を用いることができないので、別のコーディング手法を開発する必要がある。たとえば、電圧印加電極だけではなく、接地電極内とその表面にも仮想電荷（電圧印加電極の仮想電荷とは独立している）と輪郭点（電位0）をそれぞれ配置するものとし、GAでそれらの位置を決定すればよい。また、誘電体を含む計算では評価関数 $\sigma$ は本研究で用いた式とは根本的に異なる式を採用する必要がある。

#### Appendix 致死遺伝子の検出

電荷重畠法による計算では、N個の仮想電荷の電気量 $x$ とN個の輪郭点の電位 $b$ の関係を示すN元1次連立方程式  $Ax = b$  が構成される。 $N \times N$ の正方行列 $A$ の要素 $A_{kj}$ は $j$ 番目の仮想電荷が $k$ 番目の輪郭点の電位に寄与する電位計数であるので、 $j$ 番目の仮想電荷と $k$ 番目の輪郭点の座標だけで決まる。このため、もし $i$ 番目の仮想電荷の座標と $j$ 番目の仮想電荷の座標が偶然にも等しいかあるいは非常に接近していると行列 $A$ の $i$ 列と $j$ 列が同じかあるいは非

常に近くなる。または同一座標を占める2つ以上の輪郭点があれば対応する行がほぼ等しくなってしまう。いずれの場合にも数値計算では $A$ が特異であると判断され、 $Ax = b$  を解いて輪郭点の電位 $b$  を満足するような仮想電荷の電気量 $x$ を求めることができない。電極が極めて微細な構造をもつ特殊な場合を除けば非常に接近した座標に2つ以上の仮想電荷（あるいは輪郭点）を置くことは無意味であるので、通常はそのような配置が最適であるとは思えない。そこで数値計算プログラムが係数行列 $A$ を特異あるいはほとんど特異と判断した個体（染色体）は「致死遺伝子」を持つ個体（染色体）であると見なして排除することができる。

#### 参考文献

- 1) 西村 亮, 西守克己, 石原永伯: 静電気学会誌, 22 (1998) 310
- 2) 西村 亮, 西守克己, 石原永伯: 静電気学会誌, 24 (2000) 59
- 3) 石田良平, 村瀬治比古, 小山修平: パソコンで学ぶ遺伝的アルゴリズムの基礎と応用, p. 4, 森北出版 (1997)