

論 文

シミュレーショントリーの境界条件に関する一考察

植 原 弘 明*,¹, 金 峯 稔 昌*,^{**,2}, 工 藤 勝 利*,²

(1999年8月19日受付, 1999年12月15日受理)

A Consideration on Boundary Condition of Simulation Tree

Hiroaki UEHARA,^{*,1} Toshimasa KANAMINE^{*,**} and Katsutoshi KUDO^{*,2}

(Received August 19, 1999; Accepted December 15, 1999)

Many complex patterns in nature such as discharge phenomena are known to be fractal objects. It is well known that the electrical trees occurring in the electrical insulation system are also fractal objects. In general, it is difficult to analyze the real electrical trees 3-dimensionally. With the development of computer system, the spatial structures of discharge patterns, which include electrical trees, have been analyzed using a computer simulation. However, the effect of the boundary conditions of simulation trees on the tree growth characteristics has not been clear. In this paper, we developed the 2-dimensional numerical simulation model of the electrical tree pattern considering the growth probability under a Laplace field. Using this numerical simulation model, we obtained the various shapes of simulation trees, such as branch-type, bush-type, and densely bush-type trees, based on two boundary conditions, and considered the relationship between the boundary condition and electrical field distribution. Furthermore, we considered the fractal dimensions of these simulation trees. The results show that the growth characteristics of simulation trees depend on the setting of the boundary condition.

1. はじめに

最近, フラクタルの概念^①と確率モデルを用いることにより, ランダムな放電パターンのコンピュータによるシミュレーション解析が行われている^{②③}.

Niemeyer らは, 実際の SF₆ガス放電で作られるリヒテンベルグ図形を模擬するために, ラプラス場での成長確率を考慮した確率モデルを提案している^④. そして, この確率モデルで得られたコンピュータシミュレーションパターンは, フラクタル性を有し, 実際のリヒテンベルグ放電図形と類似の構造となっていることを明らかにしている.

キーワード: 電気トリー, 放電, フラクタル次元, 確率モデル, 境界条件

*明治大学理工学部電気電子工学科(214-0033 神奈川県川崎市多摩区東三田 1-1-1)

Department of Electrical and Electronic Engineering,
School of Science and Technology, Meiji University,
1-1-1 Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki 214-0033, Japan

**現勤務先: 東京電力(株)栃木支店鬼怒川工務所(321-2526 栃木県塙谷郡藤原町大字滝 260)

Kinugawa-koumusho, Tochigi-branch, Tokyo Electrical Power Company, 260 Taki, Fujiwara-cho, Shioya-gun, Tochigi 321-2526, Japan

¹huehara@isc.meiji.ac.jp

²katsuto@isc.meiji.ac.jp

一方, 電気トリーのシミュレーションに関しては, Wiesmann らが, Niemeyer らの確率モデルを針-平板電極系でのトリー・シミュレーションが行えるモデルに発展させている^⑤. 筆者らは以前, Niemeyer らの提案した成長確率を考慮したシミュレーションをもとに^⑥, 針-平板電極系での3次元トリー・シミュレーションを行い, 成長確率に関するべきの指数 η を変化させることにより, トリー状からまりも状までのトリー・パターンの作成が可能であること, 及び得られたパターンがフラクタル性を有すること, について報告した^⑦.

過去のトリーのシミュレーションに関しては, 境界条件として, 針電極と平板電極に一定の電位を与えており^{⑧⑨}. 例えば, Wiesmann らが, 2次元格子において, 針電極を $\phi=0$, 平板電極を $\phi=V_0$ としてシミュレーションを行っている^⑤. しかしながら, シミュレーションを行うためには, 電極以外に2次元格子外壁部にも電位を与える必要があるが, この点に関しては, 明確にしていない.

そこで今回は, Wiesmann らの提案した確率モデルをもとに, 電気トリーの2次元シミュレーションを行い, 2次元格子外壁部の境界条件の設定を明確にし, 境界条件の設定の違いが, 電界分布やトリーの形状に与える影響について調査し, 境界条件の設定の妥当性について検

討を行った⁸⁾。さらに、それぞれの境界条件において、シミュレーショントリーを作成し、それらのフラクタル性についても検討を行なった。

2. 境界条件の設定方法

シミュレーションを行うにあたり、局部的な高電界を模擬するため、針一平板電極モデルを用いた。境界条件の設定に関しては、図1に示すように、設定のしやすさから、2つの場合について検討した。この場合、格子数を120pixel × 120pixelとした。仮想針電極を $\phi=1$ 、仮想平板電極を $\phi=0$ とし、外壁のみを変化させた⁸⁾。仮想針電極については、1pixelの太さとし、長さは30pixelと設定した。さらに仮想針電極の先端と仮想平板電極との間の距離であるギャップ長を90pixelと設定した。

図1(a)に示すように、外壁の上部を $\phi=1$ とし、側面を $\phi=1 \rightarrow 0$ と変化させたものをTYPE1とする。また、図1(b)に示すように、仮想針電極の根元より、仮想平板電極までを $\phi=1 \rightarrow 0$ と変化させたものをTYPE2とする。

図1(a)における境界条件の物理的意味は、外壁の上部と仮想針電極が導通しており、外壁の側面は高抵抗体のようなものとして捉えることができる。このモデルは、実際の実験系としては、背後電極を設けた試料として捉えることができる。具体的には、外壁の上部からの側面長は、120pixelの長さである。つまり、1pixelごと外壁の上部から離れるにしたがって1/120ずつ減少していく電位となる。

図1(b)における境界条件の物理的意味は、外壁全体が抵抗体のようなものとして捉えることができる。すなわち、物理的イメージとして、実際の針一平板電極系に最も近いモデルであるといえる。具体的には、仮想針電極から仮想平板電極までの外壁の長さは、180pixelである。つまり、1pixelごと外壁上を針電極から離れるにしたがって1/180ずつ減少していく電位となる。

また、境界上(外壁上)の電位は、シミュレーション中は不变で常に同じ値を用いた。

3. 2次元シミュレーショントリーの作成法

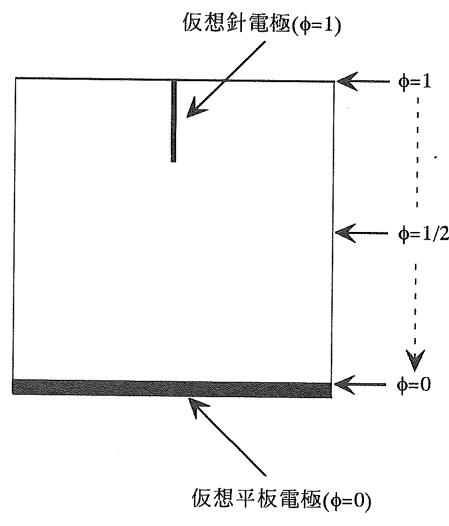
本報でのシミュレーションは、確率モデルに基づいて、以下のルールに従ってトリーを成長させる⁹⁾。

(1)2次元格子において、ラプラス方程式 $\nabla^2\phi=0$ (ϕ :ポテンシャル)をSOR法(Successive Over Relaxation Method:逐次過大緩和法)で解く。この場合、ポテンシャルを求めるための境界条件は、図1(a), (b)のように、仮想針電極では、 $\phi=1$ とし、仮想平板電極では、 $\phi=0$ とする。

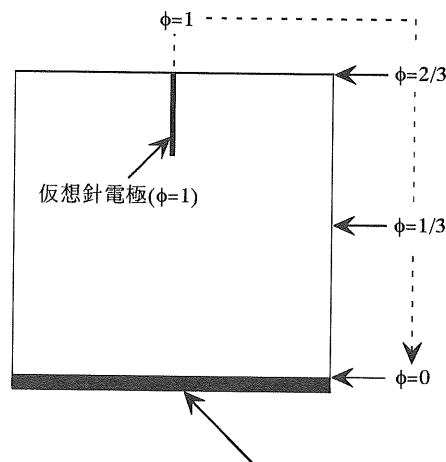
(2)格子の設定については以下のようにする。図2のように、格子状に分割したx-y平面において、 $\phi_0=\phi(x, y)$ を考える。このとき、格子間の距離はそれぞれ $\Delta x=1$, $\Delta y=1$ とし、それぞれの格子にポテンシャルを $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ として与える。それぞれのポテンシャルに関して、2階中心差分で表すと近似差分方程式で表記でき、これをラプラス方程式に代入し、整理すると、

$$\phi_0 = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) / 4 \quad (1)$$

となり、中心である ϕ_0 は、周囲のポテンシャルの平均で表現される。本研究におけるトリー部のポテンシャルに関しては、厳密には $\phi=1$ ではない。トリー部の進展に関しては、図2に示されるように、



(a) TYPE1



(b) TYPE2

図1 境界条件の設定

Fig.1 Setting of boundary condition for tree simulation.

上下左右の4近傍の格子のポテンシャルの平均として求められるので、若干ではあるが、進展ごとにポテンシャルは降下する。

- (3) トリーに隣接する全ての進展可能な格子(トリーを構成している各格子に隣接する上下左右の4近傍の格子から、すでにトリーが存在している格子、三股分岐となる格子、電極または外壁となっている格子を除いたもの)に対して局部電界を求める。

図3に、進展可能な格子の模式図を示す。

- (4) トリーの進展可能な各格子の成長確率 P_i を求める。その成長確率 P_i は、トリー先端部の局部電界 E_i と式(2)で関係づけられ、

$$P_i = E_i^n / \sum E_j^n \quad (2)$$

となり、この式(2)を用いて成長点を決定する。分子の総和は、局部電界を求めたトリー進展可能なすべての格子について行う。

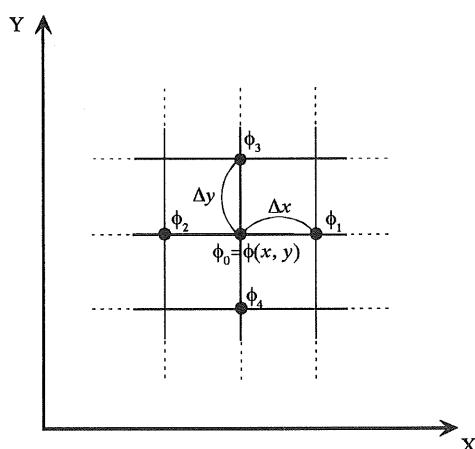


図2 2次元格子の設定

Fig.2 Setting of 2-dimensional lattice.

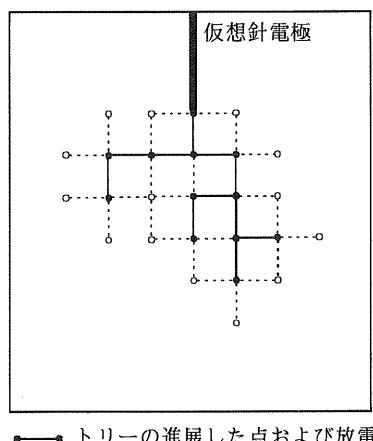


図3 トリー・シミュレーションにおける進展可能な格子の2次元的模式図

Fig.3 2-dimensional illustration of the possible growth lattice for tree simulation.

- (5) 選んだ格子を、成長するトリー先端部につけ加える。

- (6) ステップ(1)から(5)までを繰り返す。

4. フラクタル次元の求め方

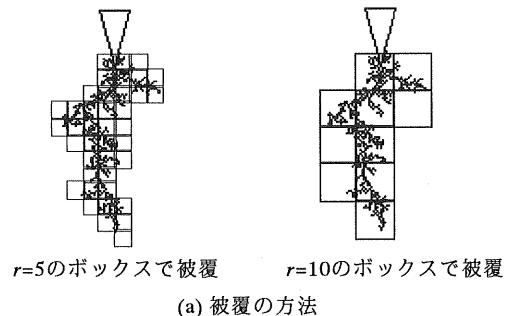
フラクタル性を有するパターンを定量化するために、フラクタル次元が求められている。フラクタル次元を求めるには、いくつかの方法があるが、ここでは Box Counting 法を用いた^{9,10)}。

Box Counting 法とは、図4に示すように、被測定图形を、幾何学图形(正方形、立方体など)で能率的に覆ったときの被覆图形の個数を数える方法である。被覆图形の一辺の長さ r と被覆图形の個数 $N(r)$ との間には、次の式が成り立つ。

$$N(r) \propto r^{-D_f} \quad (3)$$

ここで、 D_f はフラクタル次元である。

図4(a)に示すように同じ大きさのボックスで被覆したとしても、ボックスの位置をずらすことにより被覆するボックスの個数は変わってくるが、ボックスの位置を



$r=5$ のボックスで被覆 $r=10$ のボックスで被覆

(a) 被覆の方法

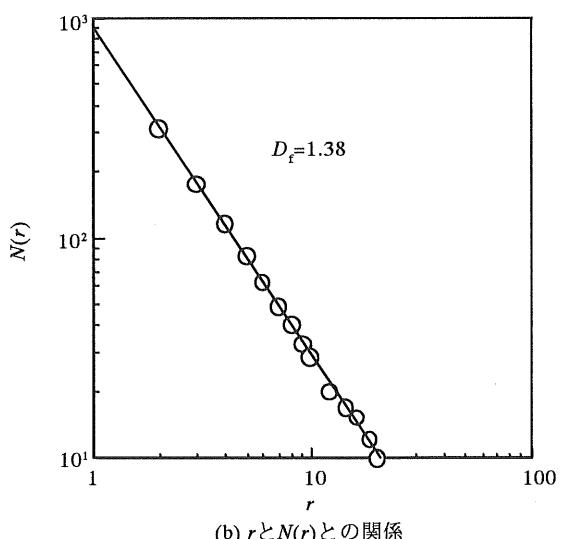


図4 Box Counting 法によるフラクタル次元の求め方

Fig.4 Estimation of fractal dimension by Box Counting Method.

ずらして被覆するボックスの数が最小になるときのボックスの数を $N(r)$ とする。 r をいくつか変えて測定し、図 4(b) のように両対数グラフにプロットすると、もし被測定図形がフラクタル性を有していれば、直線にのるのでその傾きよりフラクタル次元 D_f を得ることができる。図 4 の例だと、フラクタル次元 D_f は 1.38 と求まる。

5. 実験結果及び検討

5.1 境界条件と電界分布

図 5(a), (b) は、トリーを発生させていないときの、それぞれの境界条件における等電位線を示している。電気力線は等電位線に垂直な線であるから、等電位線図より電気力線の様子がわかる。すなわち、等電位線の密なところは高電界を示しており、等電位線の疎なところは低電界を示している。等電位線には、ポテンシャルの大きさに従って、濃淡をつけてある。

図 5(a) では、仮想針電極の先端が高電界になっており、電気力線は仮想針電極先端および外壁上部より仮想平板電極へ向かって均一に垂直に伸びているのがわかる。また、図 5(a) より、仮想針電極の先端部は極端な高

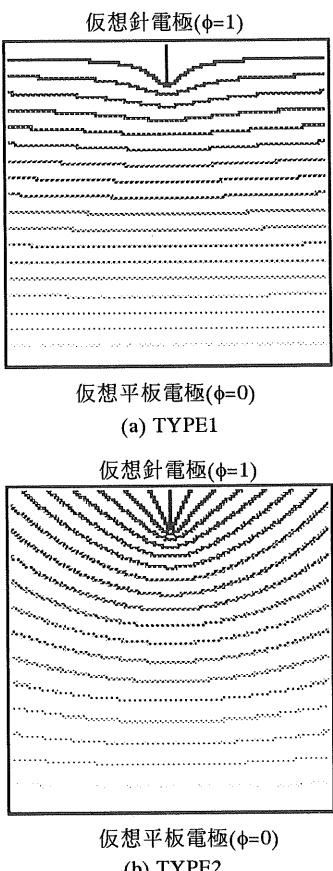


図 5 境界条件の違いによる電界分布(等電位線図)
Fig.5 Field distribution due to difference of boundary condition.

電界にはなっていないことがわかる。

図 5(b) では、TYPE1 と同様に、仮想針電極の先端が高電界であるが、電気力線が仮想針電極より仮想平板電極側へ放射状に伸びており、実際の針-平板電極モデルに近い電界分布を示しているのがわかる。

5.2 境界条件の違いによるトリー形状

図 6 から図 8 は、それぞれの境界条件を与え、 $\eta=0.5, 1.0, 3.0$ と変化させて、シミュレーションを行ったときのトリー形状である。また、表 1 に TYPE 別のトリー形状についてのフラクタル次元を示す。図 6 から図 8 までの結果から、トリー形状に着目すると、それぞれ、密なブッシュ状トリーから疎なブッシュ状トリー、トリー状トリーと変化しているのがわかる。

TYPE1 から TYPE2 になるにつれて、横方向へ進展しやすくなっている。トリー進展は電界分布と関係していることがわかる。特に、 η が大きいとき、すなわち、トリー先端部の電界の影響が大きいとき、トリーは電界分布により形状が左右されているといえる。

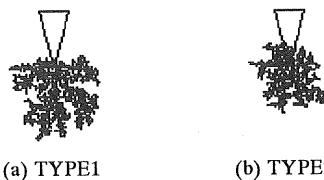


図 6 境界条件の違いによる 2 次元シミュレーショントリーパターン ($\eta=0.5$)
Fig.6 2-dimensional simulation tree patterns due to difference of boundary condition ($\eta=0.5$).

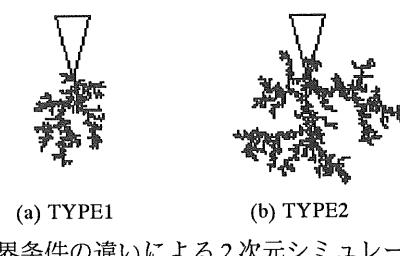


図 7 境界条件の違いによる 2 次元シミュレーショントリーパターン ($\eta=1.0$)
Fig.7 2-dimensional simulation tree patterns due to difference of boundary condition ($\eta=1.0$).

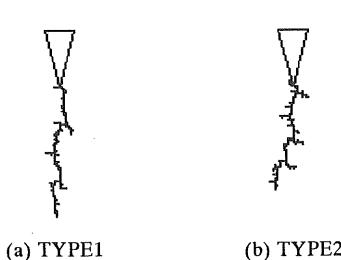


図 8 境界条件の違いによる 2 次元シミュレーショントリーパターン ($\eta=3.0$)
Fig.8 2-dimensional simulation tree patterns due to difference of boundary condition ($\eta=3.0$).

表1 2次元シミュレーショントリーのフラクタル次元

Table 1 Fractal dimension of 2-dimensional simulation tree.

η	TYPE1	TYPE2
0.5	1.74	1.70
1.0	1.58	1.56
3.0	1.21	1.25

以上のように、境界条件により形状に違いが見られたが、フラクタル次元に関しては、表1の結果より大きな影響がないようである。これは、フラクタル次元は形状そのものというよりも、パターンの持つ複雑さを量化しているために、進展方向の違いによる次元の差異はあまり生じないと考えられる。

5.3 トリー先端部における電界分布

図9から図11は、それぞれの境界条件において、 $\eta=0.5, 1.0, 3.0$ と変化させたときのシミュレーショントリーの電界分布の様子である。

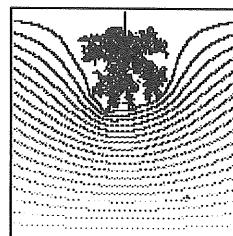
TYPE1, TYPE2のいずれの場合においてもトリー先端部が最も高い電界になっていることがわかる。

TYPE1, TYPE2とも、高電界な部分は仮想針電極付近であるが、他にもそれに準じた高電界な部分が形成されている。さらにTYPE2では、高電界な部分がトリー全体を包み込むように形成されているのがわかる。したがって、トリーの進展方向に関しては、針中心軸方向への伸びが最も強く、それに次いで横方向への伸びも比較的大きくなっている。針中心軸方向と横方向へ進展する形状が多いと推察される。

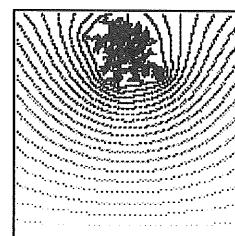
また、トリー先端部の電界分布に着目してみると、トリー状のパターンが最も高い電界を示している。ブッシュ状とまりも状に関しては、トリーの分岐が多いために、トリー状と比べて、トリー先端部の局部電界は小さくなっているようである。

図12は、TYPE2について、3種類のトリーパターンのフラクタル次元とトリー先端部における電界強調率の関係を示したものである。この電界強調率は、図9(b)の密なブッシュ状トリーの先端部における最大局部電界を1としたときの、ほかのパターンとの比率で表している。

図12より、電界強調率は、密なブッシュ状・疎なブッシュ状・トリー状の順でトリー先端部における電界強調率が大きくなることがわかる。図12からも明らかなように、トリー状トリーのトリー先端部における局部電界が最も高いことがわかる。すなわち、分岐が多いトリー形状のトリーでは、トリー先端部における局部電界が緩和され、分岐が少ないトリー形状のトリーでは、トリー



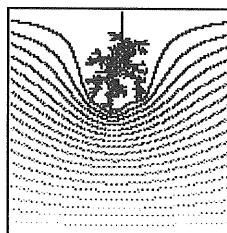
(a) TYPE1



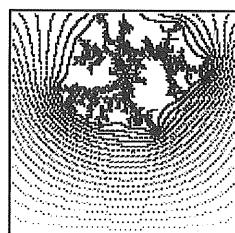
(b) TYPE2

図9 境界条件の違いによる2次元シミュレーショントリーの電界分布($\eta=0.5$)

Fig.9 Field distribution of 2-dimensional simulation tree by defference of boundary condition ($\eta=0.5$).



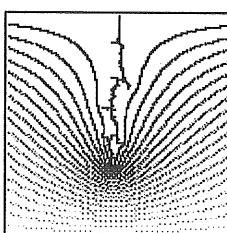
(a) TYPE1



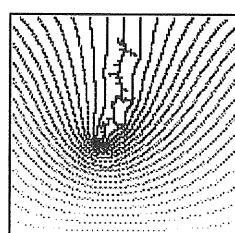
(b) TYPE2

図10 境界条件の違いによる2次元シミュレーショントリーの電界分布($\eta=1.0$)

Fig.10 Field distribution of 2-dimensional simulation tree by defference of boundary condition ($\eta=1.0$).



(a) TYPE1



(b) TYPE2

図11 境界条件の違いによる2次元シミュレーショントリーの電界分布($\eta=3.0$)

Fig.11 Field distribution of 2-dimensional simulation tree by defference of boundary condition ($\eta=3.0$).

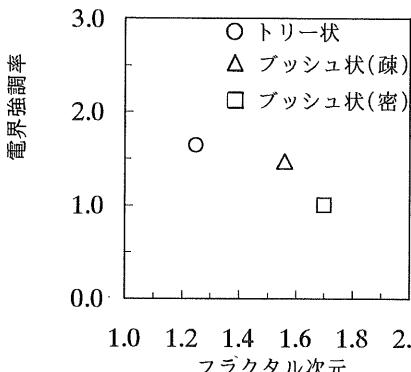


図12 フラクタル次元とトリー先端部における電界強調率の関係(TYPE2)

Fig.12 Relationship between field emphasis rate in the point of tree and fractal dimension.

先端部における局部電界が強調されていることがわかる。

今回の境界条件において、TYPE2のモデルが、実際の針-平板電極モデルに近いと考えられることから、実際のトリーの進展時における電界分布も同じようになると推察される。また、シミュレーショントリーの先端部における、それぞれのトリー形状の違いによる電界強調率の関係は、実際のトリーでも同様の関係があると推察される。

ところで、本シミュレーションでは、材料による境界条件の違いが考慮されていない。今回は、外壁のポテンシャルを段階的に(線形的に)減らしていく条件のみを考えたが、今後は、外壁のポテンシャルの条件を変化させることにより、材料による違いが考慮できるモデルの可能性について検討する予定である。

6. むすび

本シミュレーションでは、主に境界条件の違いによるトリー周辺での電界分布について検討を加えた。今回の結果からすると、基本的にはTYPE2(仮想針電極の根元から、仮想平板電極まで、 $\phi=1 \rightarrow 0$ と変化させたモデル)の境界条件が、トリーのシミュレーションにおいて妥当と考えられる。

最後に、本研究における数値シミュレーションおよびデータ解析にご協力頂いた、もと明治大学大学院生の小林正三氏(現、古河電気工業(株))に感謝する。

参考文献

- 1) B. B. Mandelbrot : *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York (1983)
- 2) L. Pietronero and H. J. Wiesmann : *J. Stat. Phys.*, **36**, (1984) 909
- 3) Y. Sawada, S. Ohta, M. Yamazaki and H. Honjo : *Phys. Rev. A*, **26** (1982) 3557
- 4) L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann : *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984) 1033
- 5) H. J. Wiesmann and H. R. Zeller : *J. Appl. Phys.*, **60** (1986) 1770
- 6) T. Hara : *Tenth Int. Conf. on Gas Discharges and Their Applications*, p.306, Inst. of Elect. Eng., Swansea, Wales (1992)
- 7) 小林正三, 工藤勝利 : 電気学会論文誌 A, **116** (1996) 651
- 8) 金峯稔昌, 椎野茂宏, 小林正三, 丸山悟, 工藤勝利 : 平成6年電気学会全国大会 No.385 (1993) 3-140
- 9) 丸山悟, 小林正三, 工藤勝利 : 電気学会論文誌 A, **113** (1993) 480
- 10) 丸山悟, 小林正三, 工藤勝利 : 電気学会論文誌 A, **114** (1994) 47