

## 論 文

# パーコレーション過程を用いたトリーの 2次元シミュレーション・

大山 龍一郎\*, 金古 喜代治\*\*, 若本 直己\*\*\*

(1997年2月27日受理)

## Simulation of Two-Dimensional Electrical Tree Patterns by Percolation Process

Ryu-ichiro OHYAMA,\* Kiyoji KANEKO\*\* and Naoki WAKAMOTO\*\*\*

(Received February 27, 1997)

Percolation cluster is used as a model of a statistical explanation for permeation phenomena such as bonding of the same atom in a mixture. The authors have studied a simulation technique for creating electrical tree patterns from similarities between the percolation cluster patterns and the tree patterns. Since local shape of the cluster pattern looks like the electrical tree pattern, a percolation cluster model enables us to simulate the tree patterns by adding distribution of electric field strength. This paper explains the simulation of tree patterns on 2-dimensional fields by using the percolation cluster model. From a viewpoint of percolation process, this paper also describes the geometric analysis of an insulating surface contact with a discharge path by using a percolation quantity  $P_e$  which characterizes the changes of perimeter of fractal figures. Finally, the similarities between the real tree patterns and the simulated tree patterns are analyzed by using fractal dimensions  $D$  and the percolation quantities  $P_e$ .

### 1. はじめに

ポリエチレンなどの高分子絶縁材料は、電力機器やケーブルの絶縁材料として広く用いられている。しかし、高分子材料は長期間にわたる高電界の印加によって経年劣化が進行し、トリーイングなどに起因する絶縁破壊を生じることが多い。トリーの発生やその進展機構については、多分に統計的な要素を含んでいるものと考えられる。すなわち、トリーの進展にともなう階層的なトリー放電路の分歧構造は、幾何学的にも複雑でランダム性を有している。また、トリーパターンはフラクタル性をもっていることから、工藤らによってフラクタル次元を用いた数量化が試みられている<sup>1-6)</sup>。フラクタル次元はパターン全体を観測した場合

と、その局所を観察した場合のパターンの自己相似を数量化したものである。したがって、フラクタル次元の大きさはトリー形状と密接な関係があり、トリー状、ブッシュ状およびよりも状トリーにおけるパターンの相違を判別する手段として用いられている。

従来より著者らは、ランダムで複雑なふるまいを数理モデル化して数値計算できるパーコレーション理論に着目して、放電路をシミュレートする方法について検討してきた<sup>9-13)</sup>。パーコレーション過程は多孔質の媒質中を流動性の物質が浸透する様子を表現した数理モデルである<sup>14)</sup>。前報<sup>13)</sup>では沿面放電パターンが複雑でランダムな分歧構造をもつことから、パーコレーションによる放電パターンのシミュレーション法を提案し、放電路の解析を行った。その結果、沿面放電のシミュレーションパターンと実測パターンのフラクタル次元がほぼ一致することを示した。

一般に、トリーイングについては、その発生や進展が絶縁材料の高次構造の影響を受けやすく、トリーは結晶内よりも非晶質の多い球晶界面を選んで進展することが知られている<sup>15)</sup>。したがって、本研究ではトリーイング現象が媒質中を流動性の物質が浸透するようなパーコレーションの特性に類似していると考えて、パーコレーション過程によ

キーワード：パーコレーション、トリーパターン、フラクタル次元、数値シミュレーション

\* 東海大学電気工学科 (259-12 平塚市北金目 1117)  
Department of Electrical Engineering, Tokai University, 1117 Kitakaname, Hiratsuka 259-12, Japan

\*\* 九州東海大学電気工学科 (862 熊本市渡鹿 9-1-1)  
Department of Electrical Engineering, Kyushu Tokai University, 9-1-1 Toroku, Kumamoto 862, Japan

\*\*\* 富士重工業株式会社 (373 群馬県太田市東本町 10-1)  
Fujijyukogyo Corp., 10-1 Higashihoncho, Ohta, Gunma 373, Japan

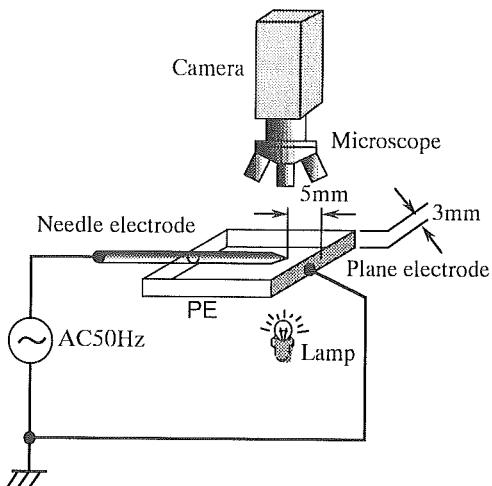


図1 実験装置の概観

Fig. 1 Outline of experimental equipment for real tree observation.

るトリーpatternのシミュレーションについて研究を行ってきた。

本論文は、交流トリーのpatternについてパーコレーション過程を用いてトリーの分岐構造を解析し、トリーpatternの新しい2次元シミュレーション法について検討したものである。また、本研究ではトリーのシミュレーション結果と実験により得られたpatternに対してパーコレーションの基本量を用いて解析することを試みたので、その概要についても報告する。

## 2. 試料と実験方法

### 2.1 試 料

図1はトリー観測の実験に使用した低密度ポリエチレンの試料形状と電極配置の概略である。交流の電気トリーを観測するための電極系は針-平板電極系であり、針電極には曲率半径  $5\text{ }\mu\text{m}$  以下に研磨された直径  $0.85\text{ mm}$  のオグラ針を使用した。平板電極は対向する試料面に銀ペイントを塗布した。試料は針電極挿入用の固定ジグを用いて恒温槽内で  $100^\circ\text{C}$  まで加熱した後、針電極と平板電極の間隙長を  $5\text{ mm}$  になるように針を挿入して室温になるまで自然冷却したものを使用した。

### 2.2 実験方法

実験は試料をシリコーン油中に浸せきして室温において行った。印加電圧は  $50\text{ Hz}$  の交流を使用した。電圧の印加は一つの試料に対して一定の電圧(各々  $13$ ,  $17$ ,  $22\text{ kV}$ )になるまで  $0.5\text{ kV/s}$  の速度で昇圧し、その電圧を20分間一定に保ってトリーpatternの観測を行った。

トリーpatternの観測は、図1に示したように試料片の上部に顕微鏡をセットして、CCDカメラによりテレビで常時モニタしながらVTRに連続的に時系列の画像として

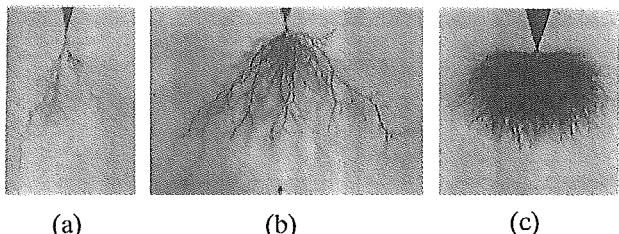


図2 実トリーpattern

Fig. 2 Real tree patterns obtained from experiment.  
(a) Tree-type tree pattern,  $D=1.48$ ,  $P_e=0.80$ , (b) Bush-type tree pattern,  $D=1.69$ ,  $P_e=0.85$ , (c) Aegagropila-type tree pattern,  $D=1.90$ ,  $P_e=0.63$ .

取録した。VTRで取録したトリー形状の画像はパソコン(Macintosh)に取り込んで2値化データとして画像処理を行った。さらに、画像処理されたデータからフラクタル次元  $D$  とパーコレーションの基本量を数値計算により求めた。フラクタル次元はボックスカウント法により求めた。

## 3. トリー形状とフラクタル次元

図2は低密度ポリエチレンで観測された実トリーpatternの一例である<sup>12)</sup>。同図にはパターンの評価を行うためにボックスカウント法で算出したフラクタル次元と後述するパーコレーション量  $P_e$  をあわせて示してある。トリーのパターンについては丸山ら<sup>6)</sup>も観測しているように、印加電圧が  $13\text{ kV}$  程度で針電極から軸方向に進展するトリー状トリーが観測される。さらに、電圧を上昇させて  $17\text{ kV}$  付近になると横方向に対しても広がりを見せ、枝分かれの複雑なブッシュ状トリーが現れる。また、電圧をさらに高めると、トリーの形状は  $22\text{ kV}$  程度で空間的に密度の高いまりも状のトリーを呈するようになる。著者らの観測したトリーpatternからフラクタル次元を求めた結果、印加電圧の昇圧によってトリー形状はトリー状トリー( $D=1.48$ )→ブッシュ状トリー( $D=1.69$ )→まりも状トリー( $D=1.90$ )と変化する。一般に、フラクタル次元はトリー形状に依存し、放電路の空間的な密度が高いほど増加する傾向がある。これらのフラクタル次元の値は、丸山らが求めた値<sup>6)</sup>とほぼ等しい。

## 4. パーコレーション過程によるシミュレーション法

パーコレーションの理論はランダム系において隣接する格子点のつながり方を理解するのに好都合である。一般に、パーコレーション過程においては、混晶型で格子点上に原子がランダムに分布するような場合に、相隣る格子点がともに同種原子で占めている塊をクラスターと呼んでいる<sup>14)</sup>。パーコレーションにより形成されるクラスターのパターンは、フラクタル性を有し複雑なパターン構造を持つ

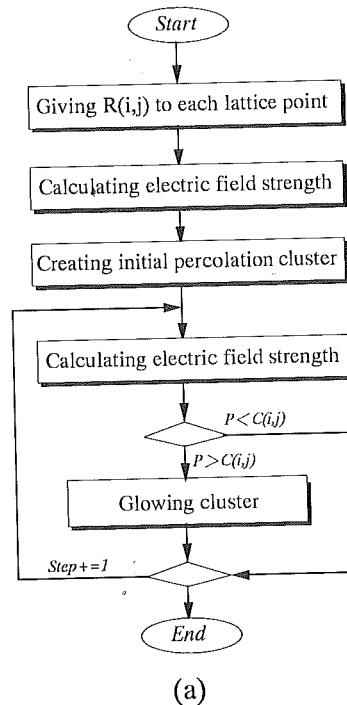
ている。この場合、パーコレーションクラスターは実験により観測されるトリーパターンにフラクタル構造の上で一致している。そこで、トリーパターンのシミュレーションは、二次元の正方格子上につくられるパーコレーションクラスターを放電路として取り扱うことにより実行する。すなわち、正方格子の各格子点に対応した  $256 \times 256$  格子点の二次元配列をつくり、その正方格子をパソコンの CRT に表示する。従来より行われているシミュレーション<sup>2~8)</sup>ではトリーの進展路だけに乱数を与えてパターンを形成するが、本法ではランダム系を構成しているために、すべての格子点に乱数を与えることによって、媒質内に外部電界の影響によりトリー放電路が自然に進展するようなモデルになっている。つまり、パーコレーションによるシミュレーションでは従来法の拡散過程と異なり、浸透過程の局所モデルであるために、各格子点（トリーが進展可能な空間）に必要な条件だけを与えることによってシミュレーションが行える。

パーコレーション過程を用いてトリーパターンのシミュレーションを実行するには、正方格子の各格子点に対応する配列に対して、次式のような  $C(i,j)$  を与える。

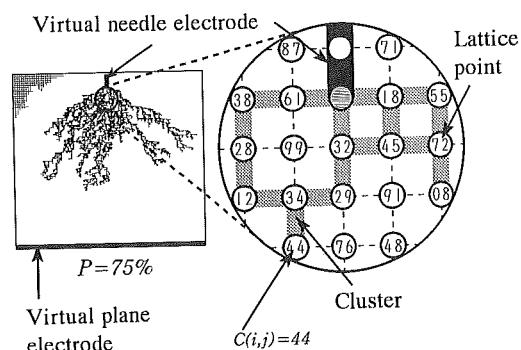
$$C(i,j) = R(i,j) + E_{\max}/k \cdot E(i,j) \quad (1)$$

ここで  $i,j$  は格子点の座標を表す。 $C(j,j)$  はパーコレーション過程における正方格子点の濃度を表す。また  $R(i,j)$  は 0 から 100 までの乱数であり、 $k$  は印加電界の影響を与える係数である。 $E(i,j)$  は電気影像法を用いて計算した各格子点の電界強度を表し、 $E_{\max}$  は最大電界値である。(1) 式はパーコレーションクラスターを作成するための条件式であり、前報<sup>13)</sup>において沿面放電路をシミュレートする際に用いた条件式と基本的に同じである。第1項はパーコレーションにおける条件式であり、第2項は本研究で加えた条件式である。クラスターを作成するには、分布確率  $P$  を任意に定めて、 $P$  より低い濃度  $C$  を保つすべての格子点にクラスターを発生させる。

図3にトリーパターンのシミュレーション法の概略を示す。同図(a)は初期クラスターの発生およびクラスターの進展についてのフローチャートである。同図(b)はトリーパターンをシミュレートするための局所クラスターの概略を示す。トリーパターンのシミュレーションでは、まず針電極の先端周辺に初期のクラスターを発生させる。この場合の初期条件は針電極の電位を  $\phi=1.0$  として、平板電極を  $\phi=0$  とした。シミュレーションはトリーの開始点となる針電極の先端を格子点として選んで、これを一つのクラスターとする。そして、このクラスターに隣接している格子点の中から、以下の [1] と [2] の条件を同時に満たすものを新たなクラスターとする。



(a)



(b)

図3 パーコレーションによるトリーパターンのシミュレーション  
(a) フローチャート、(b) トリーパターン生成の説明図。

Fig. 3 Simulation of tree pattern by percolation process.  
(a) Flow chart, (b) Explanation of creating tree pattern.

[1] パーコレーションの基本条件として、ある分布確率  $P$  において  $C(i,j) < P$  となるものを次のクラスターとする。この場合、クラスターが発生する確率は分布確率  $P$  に等しくなる<sup>14)</sup>。たとえば、二次元の全格子点の内で進展できる確率  $P=75\%$  とすると、濃度  $C(i,j)$  が 75 よりも小さい値を格納した格子点にクラスター（トリー放電路）を進展させる。

[2] 進展するクラスターは隣接する格子点よりも対向する平板電極により近い格子に生成する。すなわちトリーは対向電極の方向に進展するものとする。

初期クラスターの生成は、上記の条件を満足する格子点

が存在しなくなり、クラスターの成長が止まるまで、これら [1] と [2] の手順を繰り返すことで完了する。上記の条件についてはトリーのもつ性質や予備実験の結果から得られたものである。すなわち、条件 [1] はフラクタル解析から得られた各トリー形状に対するフラクタル次元  $D$  がトリーの空間密度に相関があることから、フラクタル次元  $D$  を分布確率  $P$  に関係付けた条件である。また、条件 [2] は絶縁材料内においてトリーの進展路が放電開始点から遠ざかる方向に進展していることから設けた条件である。

次に、トリー進展に伴う局所電界の変化を考慮してクラスターを進展させる。この場合、クラスター先端の格子点を針電極と同電位になるように境界条件を変更する。変更した境界条件の下で各格子点の電界強度  $E(i,j)$  を再度数値計算して求める。そして、前述した条件 [1] と [2] を適用してクラスターを進展させる。境界条件の変更と電界計算は、トリー進展による局所電界の変化を十分に考慮するために、クラスターが進展するごとに逐次行う。

クラスターパターンの空間密度は分布確率  $P$  が大きくなると増加し、電界による影響は係数  $k$  が大きくなると増す。前述したようにフラクタル次元  $D$  はトリーの空間密度に相関があることから、本研究では分布確率  $P$  をフラクタル次元に関係付けている。図 2 に示した実トリーパターンのフラクタル次元  $D$  について、各トリー形状に対する相対的な比率はトリー状：ブッシュ状：まりも状 = 0.78 : 0.89 : 1 (まりも状トリーの  $D=1.9$  を基準) であった。本法による各トリーパターンのシミュレーションにおいては、これらの比率を参考にして分布確率  $P$  を設定した。また、実トリーパターンを観測する際に印加した電圧値については、各トリー形状に対する相対的な比率がトリー状：ブッシュ状：まりも状 = 0.59 : 0.77 : 1 (まりも状トリーの 22 kV を基準) であった。係数  $k$  は電界の影響を表すので、この関係を参考にして設定した。

## 5. シミュレーショントリーとその考察

### 5.1 シミュレーション結果

図 4 は本法により得られたシミュレーショントリーのパターンである。同図 (a) はブッシュ状トリーの形状を模擬してクラスターを進展させたときの Step 数が 10 までのパターンを示している。同図 (b) と (c) にはトリー状トリーおよびまりも状トリーを模擬した Step 数が 10 におけるクラスターパターンを示す。分布確率  $P$  および係数  $k$  はシミュレーションに用いる乱数系列に依存するので、各パターンのシミュレーションには同一の乱数系列を用いた。すなわち、ここで示した各トリー形状に対する分布確率  $P$  の相対的な比率はトリー状：ブッシュ状：まりも状 =

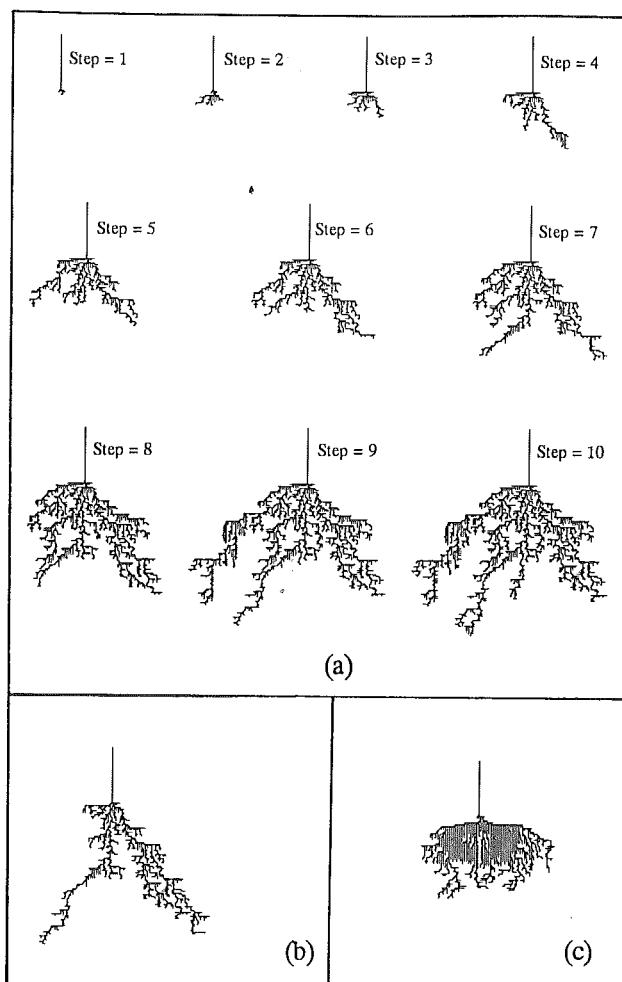


図 4 パーコレーションによるシミュレーショントリー

Fig. 4 Simulated tree patterns obtained from percolation process.

(a) Bush-type tree pattern,  $D=1.59$ ,  $P_e=0.83$ , (b) Tree-type tree pattern,  $D=1.48$ ,  $P_e=0.76$ , (c) Aegagropila-type tree pattern,  $D=1.72$ ,  $P_e=0.67$ .

0.78 : 0.93 : 1 である。これら分布確率  $P$  の比率については、図 2 に示した実トリーパターンのフラクタル次元  $D$  の比率と比較してほぼ類似している。さらに、これらのシミュレーショントリーにおけるフラクタル次元は、トリー状トリー ( $D=1.48$ ) → ブッシュ状トリー ( $D=1.59$ ) → まりも状トリー ( $D=1.72$ ) と変化する。このシミュレーション結果は、実トリーパターンのフラクタル次元にほぼ一致している。また、シミュレーションにおいては係数  $k$  の値を高めることによりトリー形状がトリー状からまりも状に近づくことが知られた。

### 5.2 クラスターの大きさと周縁

パーコレーション過程において、クラスターのつながり方を議論するときには、クラスターの大きさ  $s$  と周縁  $t$  が重要な意味をもつ基本量になる<sup>13)</sup>。クラスターの大きさ  $s$  はクラスターに含まれる格子点の数のことである。また、

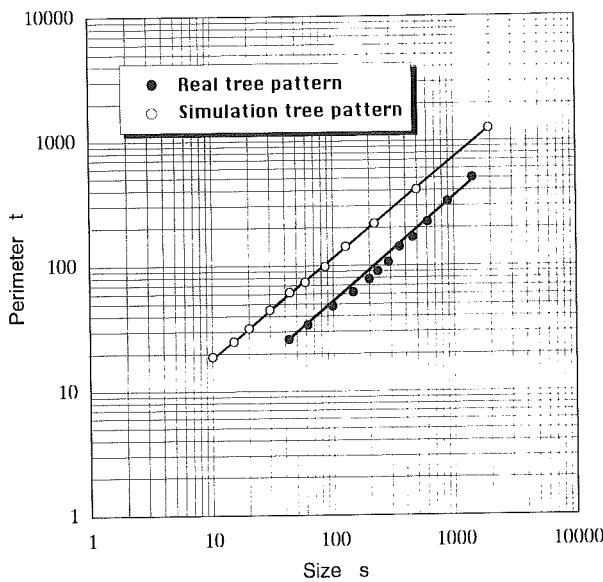


図 5 クラスターの大きさ  $s$  と周縁  $t$  による実トリー パターンとシミュレーショントリー パターンの 比較

Fig. 5 Comparison of simulated tree pattern with real tree pattern by means of cluster size  $s$  and its perimeter  $t$ .

周縁  $t$  はクラスターに隣接する格子点の数である。本論文では、実験により観測された実トリー パターンを正方格子に離散化してパーコレーションの基本量である  $s$  と  $t$  を求めて、トリー パターンのシミュレーション解析に応用した。

クラスターの大きさ  $s$  と周縁  $t$  を求めるには、一辺のドット長  $r$  をもった正方格子を実トリー パターンに重ね合わせる。そこで、一つの格子点に着目して隣接する格子点との間に実トリー パターンが存在すれば、その格子点にクラスターを生成させる。すべての格子点に対して、この操作を実行した後で、隣接するクラスターを接続することによって一つのクラスターとし、このクラスターについて大きさ  $s$  と周縁  $t$  を求めた。図 5 はトリー パターンに対するクラスターの  $s$  と  $t$  を求めて両対数でプロットしたものである。実測されたトリー パターンから得られた  $s$  と  $t$  の値と本論文で提案したシミュレーション法により得られた  $s$  と  $t$  は、良好な直線性を有しており、その傾きがほぼ等しいことがわかった。

### 5.3 パーコレーション量

トリー パターンに対するクラスターの  $s$  と  $t$  からトリー パターンの形状分類を行った。著書らは、図 5 に示したクラスターの大きさ  $s$  と周縁  $t$  の直線の傾きのことを便宜的にパーコレーション量  $P_e$  と仮称している。図 6 は各種のトリー 形状に対してパーコレーション量  $P_e$  を求めた結果を示している。パーコレーション量  $P_e$  の値は正方格子の一辺のドット長  $r$  を変化させ、パターンの大きさを変えて

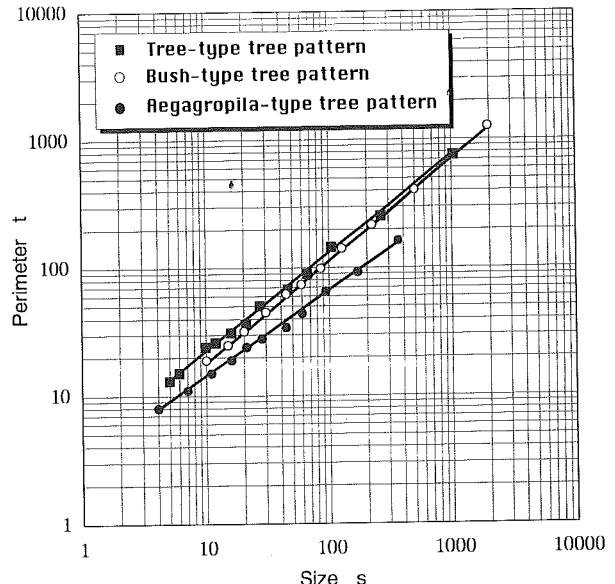


図 6 各種トリー パターンに対するクラスターの大きさ  $s$  と周縁  $t$  の関係

Fig. 6 Relationship between cluster size  $s$  and its perimeter  $t$  for tree patterns with different shapes.

も変化しない。図 2 に示した実トリー パターンに対するパーコレーション量  $P_e$  は、まりも状トリー ( $P_e=0.63$ ) → トリー 状トリー ( $P_e=0.80$ ) → ブッシュ状トリー ( $P_e=0.85$ ) の順で大きくなっている。また、シミュレーショントリーにおいても  $P_e$  は、まりも状トリー ( $P_e=0.67$ ) → トリー 状トリー ( $P_e=0.76$ ) → ブッシュ状トリー ( $P_e=0.83$ ) の順で大きくなっていることがわかった。

一般に、ボックスカウント法は解像度を任意に変化させたときの 1 画素の長さ  $r$  とトリー パターンが占める総画素数  $N(r)$  の関係を数量化したものであり、次式で表されている<sup>2)</sup>。

$$N(r) \propto r^D \quad (2)$$

すなわち、(2) 式のフランタル次元  $D$  は、解析空間中をトリー パターンが占める割合が高いほど大きくなる。たとえば、直線状パターンのフランタル次元は、解像度を 2 倍にすると  $r$  と  $N(r)$  も 2 倍になるので (2) 式より  $D=1$  である。また、面状パターンでは解像度を 2 倍にすると  $r$  が 2 倍になり  $N(r)$  が 4 倍になるので  $D=2$  である。2 次元空間においてフランタル次元は  $D=1 \sim 2$  の値をとる。フランタル次元  $D$  は解像度に対するトリー 放電路の面積変化を見ていたので、トリー 状 → ブッシュ状 → まりも状の順に大きな値をとる。

これに対して、パーコレーション量  $P_e$  は解像度を任意に変化させたときのクラスター パターンの大きさ  $s$  と周縁  $t$  の関係を数量化しており、次式で表せる。

$$t \propto s^{P_e} \quad (3)$$

パーコレーション量  $P_e$  は、トリーパターンの大きさ  $s$  に対して周縁  $t$  の多いパターンほど大きくなる。たとえば、直線状パターンのパーコレーション量は解像度を2倍にすると  $s, t$  ともに2倍になるので(3)式により  $P_e=1$  である。また、面状パターンでは解像度を2倍にすると  $s$  が4倍になり  $t$  が2倍になるので  $P_e=0.5$  である。2次元空間においてパーコレーション量は  $P_e=0.5 \sim 1$  の値をとる。このパーコレーション量  $P_e$  はトリー放電路のフラクタル次元  $D$  ( $=D_{fs} \propto \log s / \log r$ ) と、トリー周縁(放電路に接している絶縁体界面)のフラクタル次元  $D_{ft}$  ( $\propto \log t / \log r$ ) を用いて(3)式より

$$(4) \quad P_e \propto D_{ft} / D_{fs}$$

のように表せる。すなわち、パーコレーション量  $P_e$  はトリー放電路と絶縁体界面の各々のフラクタル次元の比を数量化している。したがって、パーコレーション量  $P_e$  を用いるとトリー放電路の複雑さに対する絶縁体界面の複雑さの度合いを見ることができるので、まりも状→トリー状→ブッシュ状の順に大きな値になることが知られる。

## 6. まとめ

本論文はパーコレーション過程を用いてトリーパターンをシミュレートする方法を提案するとともに、本法により得られたシミュレーショントリーを提示した。また、そのシミュレーション結果については、従来より検討されてきたフラクタル次元との関連において比較検討を加えた。その結果、以下のような点が明らかになった。

(1) 本法では、分布確率  $P$  と(1)式に示した係数  $k$  を変化させることにより、トリー状、ブッシュ状ならびにまりも状トリーのパターンを作成することができた。

(2) シミュレーショントリーの評価は、シミュレーショントリーのフラクタル次元  $D$  が、実測したトリーパターンのフラクタル次元  $D$  に近似していることから検証し、その幾何学的な相似性を確認することができた。

(3) 実トリーパターンにより得られたクラスターの大きさ  $s$  と周縁  $t$  の値とシミュレーショントリーの  $s$  と  $t$  は、(3)式に示した関係をよく満足した。このことよりパーコレーション量  $P_e$  を用いてトリーパターンの幾何学的に複雑な形状を数量化できることができた。

(4) トリー形状に対するパーコレーション量は実パターンのまりも状トリーで  $P_e=0.63$ 、トリー状トリーで  $P_e=0.80$ 、ブッシュ状トリーで  $P_e=0.85$  の順に大きくな

る。また、シミュレーショントリーではまりも状トリーで  $P_e=0.67$ 、トリー状トリーで  $P_e=0.76$ 、ブッシュ状トリーにおいて  $P_e=0.83$  であった。すなわち、実トリーパターンとシミュレーショントリーパターンのパーコレーション量はよく一致している。

(5) トリー形状におけるフラクタル次元  $D$  はトリー状→ブッシュ状→まりも状の順で大きな値をとるが、パーコレーション量  $P_e$  はまりも状→トリー状→ブッシュ状と変化するほど大きな値となる。したがって、パーコレーション量はフラクタル次元と異なるトリーパターンの特徴を抽出しているものと考える。

今後は、実際のトリーが3次元構造であるために、トリーの3次元シミュレーションについて検討する必要があると考えている。

最後に、本論文を投稿した後間もない平成8年9月23日にお亡くなりになられました共著者金古喜代治博士のご冥福を謹んで心の底からお祈りいたします。

## 参考文献

- 1) S. Fujimori : *Proc. of 3rd International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials*, p. 131 (1991)
- 2) 工藤勝利：静電気学会誌, **16** (1992) 115
- 3) 工藤勝利, 丸山 悟：電学論 A, **111** (1991) 682
- 4) K. Kudo and S. Maruyama : *Proc. of International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials*, p. 135 (1991)
- 5) S. Maruyama, S. Kobayashi and K. Kudo : *Proc. of International Conference on Conduction and Breakdown in Solid Dielectrics*, p. 318 (1992)
- 6) 丸山 悟, 小林正三, 工藤勝利：電学論 A, **113** (1993) 480
- 7) 丸山 悟, 小林正三, 工藤勝利：電学論 A, **114** (1994) 47
- 8) 丸山 悟, 工藤勝利：電学論 A, **112** (1992) 332
- 9) 若本直己, 大山龍一郎, 金古喜代治：可視化情報, **14**, Suppl. 1 (1994) 143
- 10) 若本直己, 大山龍一郎, 金古喜代治：平成6年電気関係学会九州支部大会, No. 750 (1994)
- 11) 若本直己, 大山龍一郎, 藤森成一, 金古喜代治：平成7年電気学会全国大会, No. 378 (1995)
- 12) 若本直己, 大山龍一郎, 金古喜代治：第19回静電気学会学術講演会, 4p A6, p. 327 (1995)
- 13) 若本直己, 大山龍一郎, 金古喜代治：静電気学会誌, **20** (1996) 115
- 14) 小田垣孝：パーコレーションの科学, 裳華房 (1993)
- 15) 山北隆征, 有安富雄：電学論 A, **110** (1990) 817