

## 論 文

## 電子写真用コロナ帯電器の有限要素法によるイオン流動解析

栗林 夏城\*, 鳥居 卓爾\*

(1996年1月31日受理)

Ion Flow Analysis of Corona Charger in Electrophotography  
with Finite Element Method

Natsuki KURIBAYASHI\* and Takuji TORII\*

(Received January 31, 1996)

Ion flow in corona chargers for electrophotograph printer is calculated neglecting the corona discharge area. In the previous report, the authors analyzed the corona discharge phenomena near a discharge wire and showed that the Sarma's boundary condition at the surface of discharge wire can be applied even for corona chargers. Moreover, the authors showed that the ion current distribution in cylindrical corona dischargers can be calculated using the above boundary condition and neglecting the discharge area near the discharge wire. In this report, the ion flow in two dimensional corona chargers is calculated numerically by finite element method neglecting the discharge area and using the above boundary condition. SUPG method, one of upwind methods used in numerical fluid dynamics, is used to reduce the accumulated error due to dominant convection component of ion transport. Three examples are calculated: (1) In the case of a cylindrical discharger, the numerical results gave the almost the same results as the analytical ones. (2) In the case of a simple box charger, the numerically calculated ion current densities differed from the experimental ones by 5%. (3) In the case of the surface voltage of the rotating photoconductor opposed to a box discharger, the numerically calculated finally attained voltage differed from the experimental one about 10%.

## 1. まえがき

電子写真用コロナ帯電器の設計のため、イオン流動の計算法を検討した。前報<sup>1)</sup>では、「放電ワイヤ表面の電界強度が、放電開始後電圧をさらに上げても放電開始時の値に留まる」という、直径 10 mm の高圧送電線の場合での Sarma の仮定が、放電ワイヤの直径が数 10 [μm] 程度のコロナ帯電器の場合にも成り立つことを示し、これを境界条件として使うことで放電ワイヤ近傍の放電領域を無視しても円筒型放電管全領域でのイオン电流分布が 1 次元円筒座標系で計算できるという結論を得た。

本報告では、2 次元場のイオン流動について前報と同様に放電領域を無視し上述の境界条件を用いて、領域分割の自由な有限要素法により計算した。さらに回転ドラム上の感光体表面の帶電分布の計算も含めたコロナ帯電

器プロセス全体としてのシミュレーションを行った。

2 次元のイオン流動の数値計算例としては一般化座標を用いた差分法でイオン流動の時間変化を扱ったもの<sup>2)</sup>、電場の計算に境界要素法、イオン流動の計算に特性曲線法を用いて定常解を求めたもの<sup>3)</sup>、有限要素法で定常解を求めたもの<sup>4)</sup>などがある。いずれも以下に述べるイオン流動方程式を上述の境界条件を用いて計算したものである。

イオン流動方程式の定常解については有限要素法で解いた例があるが<sup>4)</sup>、電荷密度分布が時間とともに変化するような現象を扱うことができないため本報告では帶電した感光体の移動に伴う電場の変化を考えて時間変化も考慮した。また拡散よりも圧倒的に流動が支配的な流れの数値計算では、誤差が累積するのを防ぐために一般に上流化と呼ばれる様々な手法が使われているが、本報告ではその中の SUPG 法を用いた。

以下では、コロナ帯電器の現象の概略を述べた後、イオン流動解析のモデル化、定式化を行い、単純形状のコロナ帯電器への適用例を示し、検討を行う。

キーワード：コロナ帯電器、放電、イオン流動、数値計算、有限要素法

\* 日立機械株式会社勝田研究所 (312 ひたちなか市武田 1060)

Katsuta Research Laboratory, Hitachi Koki Co., Ltd., 1060, Takeda, Hitachinaka, 312 Japan

## 2. コロナ帯電器の現象とモデル化

コロナ帯電器の概略図を図1に示す。コロナ帯電器の現象は放電、イオン流動、帶電の三つに分けることができる。またこれらの現象は帯電器の長手方向に対しては一様と見なすことができるから2次元として扱える。本研究では放電領域を無視し前述の境界条件を用いて正コロナ放電についてイオン流動、感光体帶電の計算を行った。

### 2.1 イオン流動

放電領域以外では電子なだれが起ららず、電子密度は小さいため無視でき、正イオンの流動拡散のみが支配的である。支配方程式は正イオンによる電流連続の式(1)と電場を表すボアソンの式(3)である<sup>5)</sup>。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_{ion} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} = \mathbf{J}_{ion} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \\ q = e n_{ion} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} = \mu_{ion} \mathbf{E} \\ J_{ion} = q v = q \mu_{ion} E \end{array} \right. \quad (4)$$

ここで、記号は、 $\mathbf{J}$ [A/m<sup>2</sup>]：全電流密度； $\mathbf{J}_{ion}$ [A/m<sup>2</sup>]：正イオン電流密度； $q$ [C/m<sup>3</sup>]：電荷密度； $\mathbf{E}$ [V/m]：電界強度； $n_{ion}$ [number/m<sup>3</sup>]：正イオン密度； $e$ [C]：素電荷； $\epsilon_0$ [F/m]：真空の誘導率である。

正イオンの運動は電場 $\mathbf{E}$ [V/m]に沿った連続流とみなすことができ、流動速度 $v$ は式(5)で与えられる。また流動に比べて拡散を無視できるのでイオン電流密度 $J_{ion}$ [A/m<sup>2</sup>]は式(6)のように表すことができる<sup>5)</sup>。

$$v = \mu_{ion} E \quad (5)$$

$$J_{ion} = q v = q \mu_{ion} E \quad (6)$$

ここで $\mu_{ion}$ [m<sup>2</sup>/Vs]は正イオンの移動度である。

以上の式(1)～(6)の関係を用いると以下に示すイオ

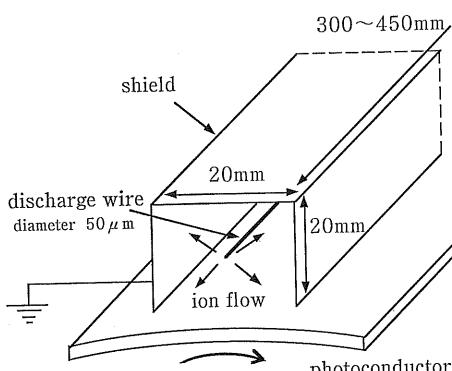


図1 コロナ帯電器概略図

Fig. 1 Corona charger.

ン流動の支配方程式を得る。ただし、式(9)は式(3)を再記したものである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \\ \mathbf{J} = q \mathbf{v} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} = q \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \\ q = e n_{ion} \end{array} \right. \quad (9)$$

## 2.2 帯 電

図2に示すように感光体をコンデンサ $C[F]$ と抵抗 $R[\Omega]$ の並列回路とみなし、コンデンサの表面電荷を $Q_1[C]$ 、リードする電荷を $Q_2[C]$ 、表面電位を $V_s[V]$ とすれば、

$$\left\{ \begin{array}{l} V_s = \frac{Q_1}{C} \\ Q_1 = C V_s \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_s = \frac{dQ_2}{dt} R \\ Q_2 = R V_s \end{array} \right. \quad (11)$$

が成り立つ。また、感光体表面での電流の連続性から表面積を $A[m^2]$ とすれば、

$$q |v| A = q \mu_{ion} |E| A = \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dQ_2}{dt} \quad (12)$$

が成り立つ。

## 3. 有限要素法によるイオン流動の計算

### 3.1 有限要素法方程式

式(7)～(9)を、未知数を電位 $\phi[V]$ 、電荷密度 $q[C/m^3]$ として2次元で書き換える。イオン移動度 $\mu_{ion}$ は一般に電場の関数であるが、電界強度があまり大きくないイオン流動の領域では一定とみなせること、並びに $E = -\nabla \phi$ という関係を用いると次式のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + q = 0 \\ \frac{dq}{dt} - \mu_{ion} \left( \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - q^2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + q = 0 \\ \frac{dq}{dt} - \mu_{ion} \left( \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - q^2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

ここで、 $q/\epsilon_0$ を新たに $q$ と置き直した。電位 $\phi$ は場

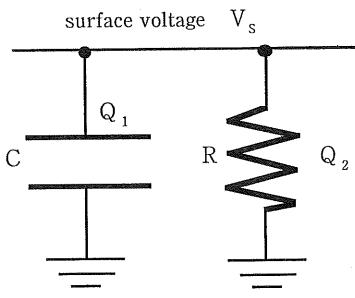


図2 感光体表面のコンデンサモデル

Fig. 2 Condenser model of photoconductor surface.

所に関して 2 階、電荷密度  $q$  は場所に関して 1 階、時間についても 1 階の連立偏微分方程式となる。式(13)を Galerkin 法によって定式化すると、 $i$  番目の節点に関する方程式は

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left[ \sum_{k=1}^{ne} \iint_{A_k} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \right] \phi_j + \left[ \sum_{k=1}^{ne} \iint_{A_k} N_i dx dy \right] q_j \right\} = 0, \\ (i=1 \dots n) \quad (15)$$

となる<sup>6)</sup>。ここで、 $n$  は節点数、 $ne$  は要素数である。

$\iint_{A_k}$  は要素内積分を表し、実際には数値積分を実行する。 $N_i$  は形状関数、 $\phi_j, q_j$  は節点  $j$  での値である。なお、本研究では要素として図 3 に示す 4 節点アイソパラメトリック要素を用いた。アイソパラメトリック要素とは正規化座標  $(\xi, \eta)$  で表される親要素から実座標  $(x, y)$  への写像関数として形状関数自身を用いるもので、このとき要素内数値積分は  $(\xi, \eta)$  座標系で代数的に行えるという理由から本論文ではこの要素を採用した。具体的な計算方法は参考文献 7) 等を参照されたい。

式(14)は流れを表す連続の式で通常の Galerkin 法では安定に計算できず、電荷密度  $q$  の誤差が累積して数値振動する。これは流動が支配的な流れの計算ではよく起こることでこの誤差は人工拡散と呼ばれており、その解決のため様々な上流化手法（差分法の場合は風上差分法に相当する）が研究されている。本研究では Taylor-Galerkin 法<sup>8)</sup>、Streamline Upwind Petrov Galerkin 法<sup>9)</sup> (SUPG 法) を試みたが SUPG 法がより安定だったのでこれを用いた。式(14)を離散化すると式(16)が得られる。

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left[ \sum_{k=1}^{ne} \iint_{A_k} N_i N_j dx dy \right] \frac{dq_j}{dt} - \mu_{ion} \left[ \sum_{k=1}^{ne} \iint_{A_k} N_i' \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \right] q_j + \mu_{ion} \left[ \sum_{k=1}^{ne} \iint_{A_k} N_i' N_j^2 dx dy \right] q_j^2 \right\} = 0 \\ (i=1 \dots n) \quad (16)$$

ただし、 $N_i'$  は SUPG 法により修正された形状関数であり、 $N_i' = N_i$  とすると通常の Galerkin 法になる。Hughes は要素の大きさに応じた、また、流れの方向に重みを付けた修正項を付加し、 $N_i'$  を次式のように表した<sup>9)</sup>。

$$N_i' = N_i + \frac{v_\xi h_\xi + v_\eta h_\eta}{\sqrt{15}} \left( \frac{v_x}{|v|} \frac{dN}{dx} + \frac{v_y}{|v|} \frac{dN}{dy} \right) \frac{1}{|v|} \\ (17)$$

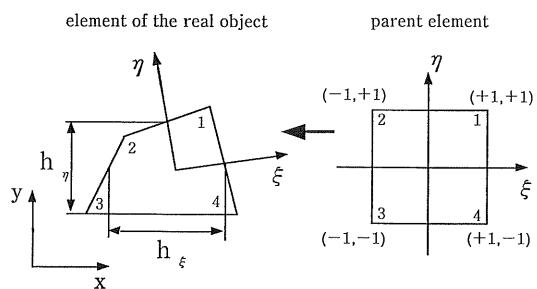


図 3 アイソパラメトリック要素  
Fig. 3 Isoparametric element.

ここで、 $h_\xi, h_\eta$  は  $\xi, \eta$  方向の要素幅（図 3 参照）、 $v_\xi, v_\eta$  は正規化座標系での流動速度の成分である。この修正された形状関数により、要素内で電荷密度の人工拡散を抑えることができる。

### 3.2 境界条件および数値計算方法

#### 3.2.1 境界条件と初期条件

式(13)は電位  $\phi$  について 2 階微分、式(14)は電荷密度  $q$  について 1 階微分が含まれているので、数値計算する際  $\phi$  について 2 個、 $q$  について 1 個の境界条件が必要である。電位についてはワイヤ印加電圧  $HV$  とシールドおよび無限遠点のアース電位を与えるべきが、電荷密度についてはワイヤ表面上の値  $q_0$  を与えなければならない。前報<sup>1)</sup>で示したように、ワイヤ表面の電界を放電開始電界として与えることは Sarma の方法<sup>10)</sup>により求めた  $q_0$  を与えることと同等になり（文献 1）参照）、この  $q_0$  を与えた。したがって境界条件は、

$$\begin{cases} \phi = HV, q = q_0 & \text{(ワイヤ表面)} \\ \phi = 0 & \text{(シールド表面)} \end{cases} \quad (18)$$

となる。

初期条件は、電位  $\phi$  については放電開始時の電場を与えた。すなわち、式(13)で  $q=0$  としてワイヤ表面に放電開始電圧を与えて求められる Laplace 方程式の解とした。電荷密度  $q$  についてはワイヤ表面上で  $q=q_0$ 、その他では  $q=0$  とした。境界条件、初期条件を表 1 に示す。

#### 3.2.2 数値計算法

まず、ワイヤ印加電圧  $HV$  を与え、Sarma の方法により  $q_0$  を求めて境界条件、初期条件を決定する。次に、式(15)と(16)は同時に解くことはせず、各時刻でまず  $q_j$  を既知として式(15)を解き、次に  $\phi_j$  を既知として式(16)を解いた。

これは現象の時間変化に比べて時間分割幅  $\Delta t$  を十分に小さく取れば有効な近似である。本プログラムでは放電開始直後で  $\Delta t=10^{-7}$  s、以降は  $\Delta t$  を徐々に大きくして計算時間を節約した。計算はイオン流動が定常に達す

表 1 境界条件および初期条件

Table 1 Boundary condition and initial condition.

	Boundary condition	Initial condition
Electric potential	$\phi = HV$ at wire surface $\phi = 0$ at shield	solution of Laplace equation with no charge
Charge density	$q = q_0$ at wire surface	$q = q_0$ at wire surface $q = 0$ at other region

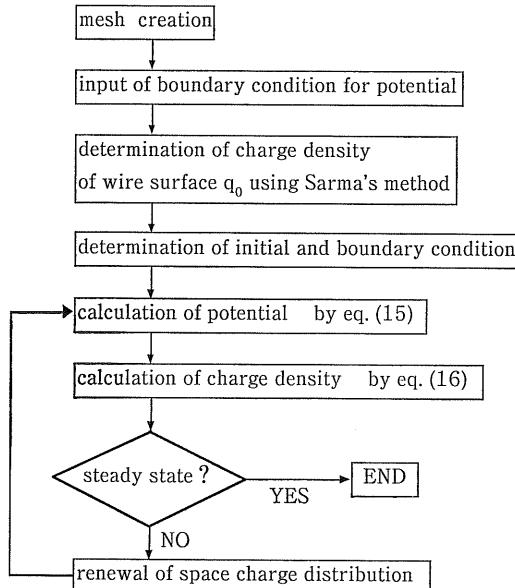


図 4 プログラムのフロー

Fig. 4 Flow chart of calculation in the ion flow region.

る時間約 5 ms まで、すなわち  $dq/dt=0$  とみなせる時間まで行った。計算のフローを図 4 に示す。

式(16)には  $q_j^2$  が含まれており非線形方程式になっているがこれは Newton-Raphson 法<sup>11)</sup>で計算した。また、この式中の  $q_j$  についての時間積分には Crank-Nicolson 法<sup>12)</sup>を使った。連立一次方程式の解法には共役勾配法<sup>13)</sup>を用いた。

なお、イオン移動度は  $\mu_{ion}=1.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{Vs}^{10)}$  として計算した。

### 3.2.3 感光体表面の移動境界条件

式(10)～(12)によりイオン流動空間における電荷密度  $q [\text{C}/\text{m}^3]$  と感光体表面の電荷  $Q_1 [\text{C}]$ 、電位  $V_s [\text{V}]$  を接続した。また、感光体の移動速度に合わせて表面を構成する節点を移動方向に順次ずらしていく方法で移動境界条件を与えた。

## 4. 計算結果

### 4.1 解析解との比較

まず最初に、有限要素法プログラムの計算精度を確かめるため、図 5 の円筒型放電管の定常解について解析解と比較した。 $r_0=30 \mu\text{m}$ ,  $r_b=10 \text{ mm}$  で、境界条件は  $HV=5,000$ ,  $q_0=1.0 \times 10^8$  として計算した。また、要素の大きさはワイヤ近傍で  $1 \mu\text{m} \times 1 \mu\text{m}$  程度、内壁付近で  $0.5 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$  程度とした。

一方、解析解は式(13), (14)で  $dq/dt=0$  として、円筒座標系に書き直して解くと

$$\phi' = -\sqrt{\frac{C_1 + C_2 r^2}{r^2}} \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \sqrt{C_1} \left( \frac{1}{2} \log \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{t} \right) + C_3, \\ t = \cos \left[ \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} r \right) \right] \end{array} \right. \quad (20)$$

$$q = \frac{1}{r^2} \left( \sqrt{C_1 + C_2 r^2} - \frac{C_1}{\sqrt{C_1 + C_2 r^2}} \right) \quad (21)$$

が得られる。ただし、 $C_1, C_2, C_3$  は積分定数である。

上記の解から、 $\phi(r_0)=5,000$ ,  $\phi(r_b)=0$ ,  $q(r_0)=1.0 \times 10^8$ , を満たす積分定数  $C_1, C_2, C_3$  を求めるには次のようにすればよい。まず式(19)で  $\phi'(r_0)$  を仮定し、これと式(21)の  $q(r_0)$  とから  $C_1, C_2$  を求め、式(20)で  $\phi(r_b)=0$  から  $C_3$  が決まる。次に  $\phi(r_0)=5,000$  になるよう

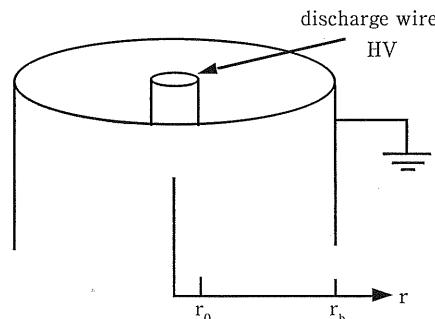


図 5 円筒形状放電管

Fig. 5 Cylindrical discharger.

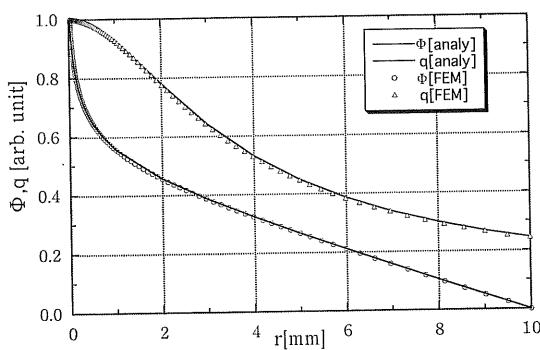


図 6 電位、電荷密度分布

Fig. 6 Distribution of potential and charge density.

に  $\phi'(r_0)$  を反復計算した。式(19)～(21)で表される解析解と有限要素法による解との比較結果を図6に示す。 $\phi, q$ とも最大値を1として規格化しており、いずれもほぼ0.1%以内で一致した。

#### 4.2 コロナ帯電器の計算

図1のような単純形状のコロナ帯電器についての計算結果を示す。図7は断面のメッシュ分割図を示しており、ワイヤ径は63 μm、節点数は866であった。計算条件は表1と同様である。

まず実験値との比較のため、感光体の代わりにアース電位の金属板電極を置いた場合を取り上げ、イオン流動が定常に達する時間5 msまでを計算した。図8は等電荷密度線図、図9は金属板へ流入するイオン電流密度分布である。図9中の実験値は金属板表面上に貼った幅1 mmの金属テープに流入する電流値を測定したもので、計算結果はこの実験値とほぼ5%以内で一致した。

次に、感光体の移動を考慮した計算を行った。図10は帶電器通過時間約0.1 sまで計算したときの表面電位の分布である。HV=5,000 V、感光体の移動速度を0.3 m/s、カタログ値より感光体の比誘電率を3、体積抵抗率を $3 \times 10^{11} \Omega \text{m}$ としている。横軸の4～24 mmの位置が帶電器の幅に相当し、帶電器を出たところで表面電位は170 Vに到達している。表面電位計による実測値では150～160 Vで差異は10%程度であった。この結果2.2節の帶電モデルでおおよその計算ができることが確認できた。また、このとき感光体表面での電流密度の計算値はピークで $7.7 \times 10^{-3} \text{A/m}^2$ であったが、図9の

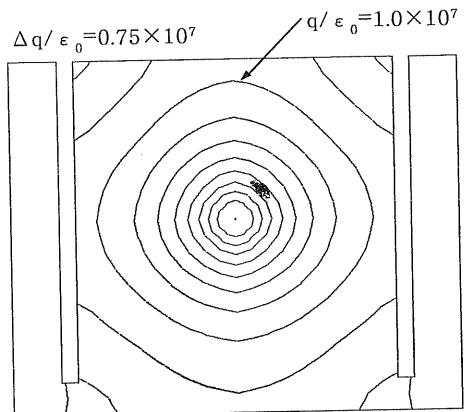


図 8 等電荷密度線図

Fig. 8 Equi-ion density lines for a corona charger.

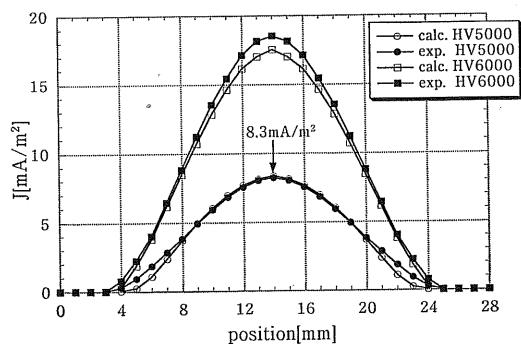


図 9 流入電流密度分布

Fig. 9 Ion current density on photoconductor surface.

位は170 Vに到達している。表面電位計による実測値では150～160 Vで差異は10%程度であった。この結果2.2節の帶電モデルでおおよその計算ができることが確認できた。また、このとき感光体表面での電流密度の計算値はピークで $7.7 \times 10^{-3} \text{A/m}^2$ であったが、図9の

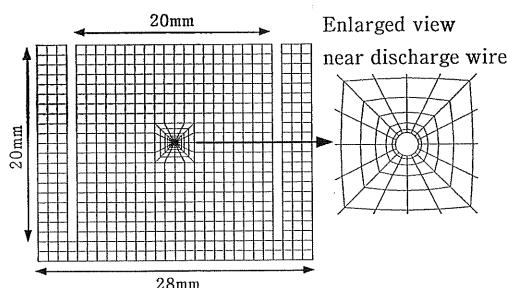


図 7 メッシュ分割図

Fig. 7 Mesh for a corona charger calculation.

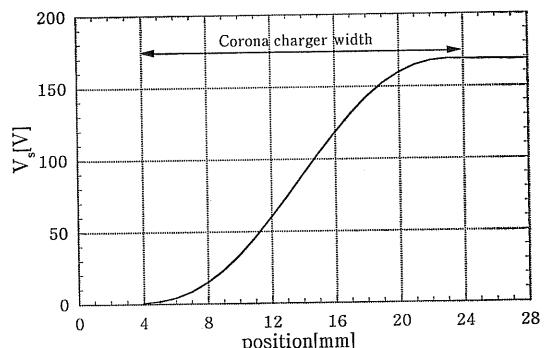


図 10 感光体表面電位分布

Fig. 10 Surface voltage on photoconductor.

ピーク値  $8.3 \times 10^{-3} \text{ A/m}^2$  と比べて低いことから、表面電位の上昇によりイオンが流れにくくなっていることがわかる。

計算時間はワークステーション HP9000/715 (100 MHz) (Linpack 100×100 37.8 MFLOPS) を使用して図 8,9 の計算の場合、時間ステップ 1,000 で約 60 分、図 10 の場合は時間ステップ 3,000 で約 180 分であった。

なお、SUPG 法を用いて有限要素法により 2 次元のイオン流動計算を行った例はまだ見当たらない。しかし、この上流化手法でもまだ課題がある。図 8~10 の計算例ではワイヤ上の電荷密度  $q_0$  を平均化して均一として計算したものであるが、非対称な帯電器形状では放電領域の様子が方向によって異なり  $q_0$  は不均一になる。この場合、不均一さの程度が激しいと電荷密度  $q$  の計算値が数値振動する。そこで当初使っていた 2 次要素の代わりに、計算の安定化のために 1 次要素を使うことにした。そのため式 (14) では  $\phi$  の 2 階微分で含まれる項  $q\nabla^2\phi$  を  $-q^2$  と表したため方程式が非線形になった。1 次要素を使うことで  $q_0$  が均一の場合には安定して計算できるようになったが、 $q_0$  が不均一のときの数値振動は若干改善したがなくなることはなかった。一方、上流化手法については Taylor-Galerkin 法、SUPG 法の他に Least-Square 法<sup>14)</sup>も試みたが上述の数値振動は解決されておらず、今後の課題として残った。

## 5. 結 論

本研究から得られた結論は次の 2 点である。

(1) 放電領域を無視し、ワイヤ表面の境界条件として Sarma の仮定を使い、イオン流動方程式を上流化手法の一つである SUPG 法を用いて有限要素法で数値計算した。その結果、金属板への流入電流密度について実験値とほぼ 5% 以内で一致することが確かめられた。

(2) 感光体の移動と表面電位上昇を考慮した計算を行った結果、実測値と誤差 10% 程度で一致し実際に適用できる見通しを得た。

コロナ帯電器設計でまず必要な情報は、全イオン電流

値と感光体表面の帶電量、または電位である。本研究で作成したプログラムはどちらも実測値と 10% 以内の誤差で計算することができる。また入力データ作成は市販の汎用プリボストプログラムを使用しており、メッシュ分割はグラフィック画面上で対話式に行える。したがって設計に有用なシミュレーションシステムとしても十分に活用していただきたい。さらに今後の課題として AC コロナについても検討する必要がある。

本研究を進めるにあたり、㈱日立製作所・機械研究所の池川昌弘主管研究長には有限要素法の流れ計算に関する様々な助言をいただき、感謝いたします。また、日立工機㈱安西主管研究員には多くの励ましと有益な示唆をいただき、感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) 栗林夏城、鳥居卓爾：静電気学会誌、20 (1996) 178
- 2) 渡辺好夫：静電気学会誌、14 (1990) 494
- 3) T. Nakamura, S. Sakai, O. Yashima, H. Igarashi and T. Honma : *The 9th Int. Cong. Non-Impact Printing Tech./Jp Hardcopy '93*, p. 93, IS&T, Japan (1993)
- 4) 服部正行、浅野和俊：電気学会論文誌 A, 106 (1986) 95
- 5) 河野照哉、宅間 董：数値電界計算法, p. 189, コロナ社 (1980)
- 6) 森 正武：数値計算プログラミング, p. 254, 岩波書店 (1988)
- 7) 矢川元基：流れと熱伝導の有限要素法入門, p. 217, 培風館 (1983)
- 8) J. Donea, S. Giuliani and H. Laval : Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 45 (1984) 123
- 9) A. Brooks and T.J.R. Hughes : Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 32 (1982) 199
- 10) M.P. Sarma and W. Janischewskyj : IEEE Trans. Power Appar. Syst., PAS-88 (1969) 718
- 11) 矢川元基：流れと熱伝導の有限要素法入門, p. 204, 培風館 (1983)
- 12) 矢川元基：流れと熱伝導の有限要素法入門, p. 117, 培風館 (1983)
- 13) 戸川隼人：マトリクスの数値計算, p. 95, オーム社 (1971)
- 14) G.F. Carey and B.N. Jiang : Int. J. Numer. Method Eng., 26 (1988) 81