

小論文

線対平行平板電極系での線電極に働く静電気力の解析

川崎元之*, 小田徹*, 青山道夫*, 足立宜良**

(1992年6月29日受理)

Analysis of Electrostatic Force Acting on a Wire
in Parallel Plate Gap

Motoyuki KAWASAKI,* Tohru ODA,* Michio AOYAMA*
and Takayoshi ADACHI**

(Received June 29, 1992)

The electrostatic force acting on a corona wire in electrostatic precipitator is an important factor as one of the driving force of the self-excited corona wire vibration. In this paper, the electrostatic force is derived analytically by means of the image method for a single-wire to parallel-plate gap modelled an electrostatic precipitator. According to the derived equation, the characteristics of electrostatic force is clarified from the point of view of corona wire vibrating force.

1. ま え が き

電気集塵装置のコロナ放電電極には、細い線電極が一般に用いられ、集塵電極である平行平板電極の電極間の中心に多並列に設置されている。この線電極はコロナ放電に伴って自励振動を生じることが知られている¹⁾。

コロナ線電極が平行平板電極間の中心から一方の平板電極側に変位した場合には、線電極は変位方向へ静電気力を受け、この力が線振動作用力となる。従って、振動作用力としては、振動方程式に関連して印加電圧一定の下での線電極の変位に対する静電気力の特性が重要になる。この場合の静電気力については、容易に求められる線対平板電極系での静電気力の解析解を重ね合わせた式を代用電荷法による数値解で補正する近似式が報告²⁾されている。その近似式は、数値解による補正係数を必要とすると共に、線電極の変位が比較的大きい領域までは検討されていない。

そこで、筆者らは線対平行平板電極系の幾何学的寸法

と印加電圧のみで決定される静電気力の解析解を映像法によって求めた。更に、得られた解析解に基づいて、振動作用力の観点から線電極の変位に対する静電気力の特性を明らかにした。これらの結果について報告する。

2. 映像電荷の配列と線電極の電位

図1に示すように、線対平行平板電極系の線電極が接地された平行平板電極の電極間の中心より一方の平板電極方向に距離 X だけ変位している状態を考える。このとき、平行平板電極間距離を $2S$ とし、半径が r である線電極の線電荷密度を $+q$ [C/m] とする。 $S \gg r$ とすると、線電極の電荷は線電極の中心に集中していると見なすことができる。線電極の映像電荷として、 $+q$ と $-q$ の線電荷が平板電極A側とB側にそれぞれ無限に分布する。線電極の中心位置を基準にして、それらの映像電荷の位置までの距離をそれぞれの平板電極に近い順に n 番目まで示すと、表1のようにまとめられる。

図1に示した線電極からの距離が y であるP点の電界の強さ E_p を表1の映像電荷の配列に従って平板電極B方向に求めると、

$$E_p = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{y} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS - 2(S+X) + y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS + y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS - 2(S-X) - y} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS - y} \right\} \quad (1)$$

キーワード：静電気力、振動作用力、電気集塵、映像電荷

* 西日本工業大学電気工学科 (800-03 福岡県京都郡刈田町新津 1633)

Department of Electrical Engineering, Nishinippon Institute of Technology, 1633 Aratsu, Kandamachi, Miyako-gun, Fukuoka, 800-03 Japan

** 大分大学工学部電気工学科 (870-11 大分市巨野原 700) Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Oita University, 700 Dannoharu, Oita, 870-11 Japan

表1 影像電荷の配列とその線電極からの距離

Table 1 Arrangement of image charges and their distance from a wire.

Distance of image charges from wire at the plate B side			Distance of image charges from wire at the plate A side	
+ q	- q	n	- q	+ q
4S	2(S+X)	1	2(S-X)	4S
8S	2(S-X)+4(S+X)	2	4(S-X)+2(S+X)	8S
12S	4(S-X)+6(S+X)	3	6(S-X)+4(S+X)	12S
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4nS	4nS-2(S-X)	n	4nS-2(S+X)	4nS

n : order of image charge

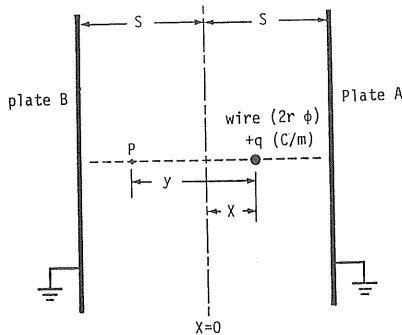


図1 線対平行平板電極系の電極配置

Fig. 1 Electrode arrangement to calculate electrostatic force acting on a wire in parallel plate gap.

となる。ただし、εは空気の誘電率である。(1)式の { } 内の第1, 第3, 第5項の和は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4nS+y}$$

に等しい。また、第4項は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4nS+2(S+X)-y}$$

に等しいので、第2項と第4項の和は

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4nS+2(S+X)-y}$$

で表される。従って、(1)式は次式のように整理される。

$$E_p = \frac{q}{2\pi\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4nS+y} + \frac{1}{4nS+2(S+X)-y} \right\} \quad [\text{V/m}] \quad (2)$$

半径がrである線電極の電位Vを(2)式から求めると、

$$V = - \int_{S+X}^r E_p dy = \frac{q}{2\pi\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{4nS+2(S+X)-r}{4nS+r} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{2(S+X)-r}{r} \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{-16n^2S^2 + \{2(S+X)-r\}^2}{-16n^2S^2 + r^2} \\ & = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \left[\frac{2(S+X)-r}{r} \right] \\ & \times \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left\{ \frac{2(S+X)-r}{4nS} \right\}^2 \right] \\ & \left/ \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left\{ \frac{r}{4nS} \right\}^2 \right] \right] \end{aligned}$$

となるので、公式³⁾、

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - Z^2/n^2) = \sin \pi Z/\pi Z$$

を用いて上式を整理すると、S≫rであるので、Vは(3)式で示される。

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \left\{ \cos \frac{\pi X}{2S} \left/ \sin \frac{\pi r}{4S} \right. \right\} \quad [\text{V}] \quad (3)$$

一方、P点がA側にある場合にもS≫rならば、(3)式が得られV一定に矛盾しない。

3. 線電極に働く静電気力

線電極の位置において、影像電荷による電界を表1から求める。A側に向く電界をE_a、B側に向く電界をE_bとすると、

$$E_a = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS-2(S+X)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS} \right\}$$

$$E_b = \frac{q}{2\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{2(S+X)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS+2(S+X)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4nS} \right\}$$

となる。従って、線電極に働く静電気力Fは、A側を正方向として求めれば、次式で与えられる。

$$F = q(E_a - E_b) = \frac{q^2}{2\pi\epsilon} \left\{ \frac{-1}{2(S+X)} \right\}$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S+X}{4n^2S^2 - (S+X)^2} \right\}$$

公式④,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z^2 - n^2} = \frac{\pi}{2Z} \cot \pi Z - \frac{1}{2Z^2}$$

を用いて上式を整理すると、 F は次式となる。

$$F = \frac{q^2}{8\epsilon S} \tan \frac{\pi X}{2S} \quad [\text{N/m}] \quad (4)$$

(3)式と(4)式から、 F と V の関係は次式で示される。

$$F = \frac{\pi^2 \epsilon V^2 \tan(\pi X/2S)}{2S \{ \ln [\cos(\pi X/2S) / \sin(\pi r/4S)] \}^2} \quad [\text{N/m}] \quad (5)$$

(5)式からわかるように、静電気力 F は印加電圧 V の二乗に比例する。前述したように、 $F=q(E_a-E_b)$ であり、 $q \propto V$ 、 $E_a-E_b \propto V$ なので $F \propto V^2$ になるのは当然の結果と言える。

線振動現象においては、一般的には印加電圧 V が一定の下での変位 X の変化であるので、振動作用力としては、 V 一定の下での X に対する静電気力 F の特性が重要になる。そこで、 r/S をパラメータにして X/S に対する静電気力の特性を(5)式から数値計算によって調べた。その計算結果の一例を図2に示す。この計算例での数値は、 $S=70 \text{ mm}$ 、 $V=50 \text{ kV}$ であり、 r/S の値は電気集塵装置に実用されている範囲⁵⁾を考慮して、 10^{-3} 、 10^{-2} 及び 5×10^{-2} の値を用いた。

図2から明らかのように、 X/S が0.4より小さい領域では5%以内の誤差で直線近似できる。このような特性の傾向は S 、 V に依存しない。従って、静電気力は電極間距離 S の約40%以内の線電極の変位に対して線形特性と近似的に見なされるが、それ以上の変位に対しては非線形特性であると言える。

このような特性は、静電気力の測定結果⁶⁾から既に知られていたが、本解析解によって新たに理論的に確かめられた。なお、測定値の方が電極の縁端効果のために計算値よりも若干大きくなる。この場合、計算値と測定値とを比較することにより線電極の有効長に関連して電極の縁端効果の程度が本解析解によって把握される。また、線電極の変位が比較的小さい領域では静電気力は線形特性と見なされるので、振動現象を解析¹⁾する場合に

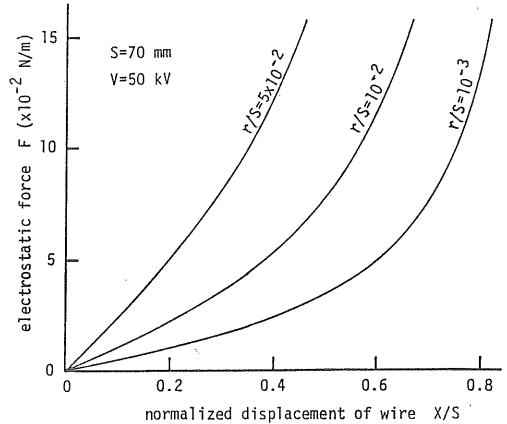


図2 静電気力の特徴

Fig. 2 Typical variation of electrostatic force as a function of normalized displacement of wire.

数学的な記述が容易になる。

4. ま と め

線対平行平板電極系での線電極に働く静電気力の解析解を求めた。この解析解に基づいて、線電極の振動作用力としての静電気力の特性を明らかにした。

その結果、静電気力は電極間距離の約40%以内の線電極の変位に対して5%以内の誤差で線形近似できるが、それ以上の変位に対しては、急激に増大する非線形特性を示すことがわかった。

最後に、有益なご助言を頂いた九州大学工学部 原雅則教授並びにご討論を頂いた大分大学工学部 大久保利一助教授、金沢誠司助手に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 川崎元之, 足立宜良: 静電気学会誌, 15 (1991) 79
- 2) 服部一郎, 山本清一郎: 静電気学会誌, 2 (1978) 43
- 3) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信: 数学公式II, p. 86, 岩波書店 (1985)
- 4) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信: 数学公式II, p. 68, 岩波書店 (1985)
- 5) H.J. White: *Industrial Electrostatic Precipitation*, p. 103, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1963)
- 6) M. Kawasaki and M. Akazaki: *Proceedings of the 2nd International Conference on Electrostatic Precipitation*, p. 1062 (1984)