

小論文

静電場計算における帯電誘電体界面での有限差分式

松原美之*

(1992年4月6日受理)

Improved Finite Difference Expression for Laplace's and Poisson's Equations on the Surface of Dielectrics

Yoshiyuki MATSUBARA*

(Received April 6, 1992)

In order to improve accuracy of numerical calculation of the electrostatic field problem which contains both dielectrics and free space, difference expression for the Laplace's and Poisson's equations is modified. By applying this expression to some simple problems, it is shown that this formula can give more precise results than well accepted Seeger's formula.

1. はじめに

帯電物体が形成する静電場を求めるためには、与えられた境界条件のもとでラプラス・ポアソンの方程式を解く必要がある。しかしラプラス・ポアソンの方程式を解析的に解くことができるのは境界条件がきわめて単純な場合に限られている。解析的に解を導くことができない多くの境界条件のもとでの静電場を具体的に求める方法のひとつに有限差分法がある。有限差分法では計算対象とする空間を格子状に分割し、格子点上での電位間の差分方程式でラプラス・ポアソンの方程式を近似させる。

帯電した誘電体の上方に無帯電の空気層が存在する場合には、誘電体と空気の境界面で誘電率と電荷密度がともに不連続に変化する。こうした、誘電率および電荷密度が不連続に変化する領域を含んだ静電場を有限差分法で計算するためには、誘電体表面での電束密度の連続則を境界条件に加えて差分式を導く必要がある。

帯電した誘電体を含む静電場の計算において使用する誘電体表面での差分式として Seeger の提案した方法が紹介されている¹⁾。Seeger の方法では、誘電体表面での電界計算を中心差分により計算することにより、通常の前方向あるいは後方差分によるよりも高い精度を得ている²⁾。中心差分を計算するために Seeger は、仮想の格子点を誘電体表面の上下に配置し、周囲の格子点の電位から仮想格子点の電位を求める方法を採用しているが、

この仮想格子点の電位を求める手順でラプラス場を前提として差分式を導いている。このため帯電した誘電体表面の静電場計算のようにポアソン場が含まれる問題に対してこの差分式を適用して計算する場合には、幾分かの誤差が含まれ、特に格子が粗い場合には大きな誤差となることが予想される。

そこで、仮想格子点電位を周辺の格子点電位から計算する手順を誘電体内部の仮想格子点についてはポアソンの方程式を用いるよう修正し、帯電した誘電体の表面でより高い計算精度が得られる差分式を導いた。

静電場を解析的に求めることのできるいくつかの問題に対して、今回得られた差分式と Seeger の差分式を適用して計算を行い精度の比較を行った。その結果、帯電誘電体を含む問題については、今回求めた差分式の方がより高い計算精度を与えることが確認された。

2. 差分式の導出

ここでは直交2次元座標系を用いて帯電した誘電体表面での差分式を導出する。採用する座標系によって導かれる差分式の形が異なってくるが、同様な手順で座標系ごとの差分式を求めることができる。

空気と誘電体の表面では電位の連続条件および電束密度の法線成分の連続条件が成り立つ。電束密度の連続条件は、真空の誘電率を ϵ_0 、誘電体の比誘電率を ϵ_r 、電位を Φ とすると、

$$\epsilon_0(\partial\Phi/\partial n)_{air} = \epsilon_0\epsilon_r(\partial\Phi/\partial n)_{di} \quad (1)$$

と表わされる。ここで $\partial\Phi/\partial n$ は法線方向の微分を、添え字 "air" および "di" はそれぞれ空気層、誘電体層を示す。また、空気の比誘電率は1とした。

キーワード：静電場計算, 差分法, ポアソン場

* 消防庁消防研究所第2研究部 (181 東京都三鷹市中原 3-14-1)

Fire Research Institute, Fire Defence Agency, 14-1, Nakahara 3-chome, Mitaka, 181 Japan

図1に格子点の配置を示す。格子点は均等な間隔 h で並んでいる。Seeger が行ったように仮想電位の点 $3'$ および $4'$ を置く。点 $3'$ での仮想電位 $\Phi_{3'}$ は、空気層がこの場所まで仮に続いていたと仮定した場合の電位を、点 $4'$ での仮想電位 $\Phi_{4'}$ は逆にこの点の位置まで帯電誘電体が連続していたと仮定した場合の電位をそれぞれ表わす。仮想点での電位を用いて式(1)中の偏微分を中心差分で近似すると次式となる。

$$(\partial\Phi/\partial n)_{air} = (\Phi_4 - \Phi_{3'})/2h \quad (2)$$

$$(\partial\Phi/\partial n)_{oil} = (\Phi_{4'} - \Phi_3)/2h \quad (3)$$

ここで、Seeger は $[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4', \Phi_0]$ および $[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3', \Phi_4, \Phi_0]$ のそれぞれの5点の格子点の電位の間にはラプラスの方程式から導かれる関係式が成立するとして、仮想電位 $\Phi_{3'}$ と $\Phi_{4'}$ を周囲の格子点の電位から求め(2)(3)の両式から消去した。しかし、(3)式は電荷が分布する誘電体内部での関係式であることを考慮すると $[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4', \Phi_0]$ の5点の電位間に成り立つ関係式としてはラプラスの方程式よりもポアソンの方程式による方が適切であると考えられる。したがって、ここではこの5点の格子点の電位の間には成立する関係式としてはポアソンの方程式を採用した。

2次元直交座標系に関してラプラス、ポアソンの方程式のそれぞれを差分化すると、式(4)および(5)となる¹⁾。なお、式(4)中の ρ は誘電体中の電荷密度である。

$$(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4' - 4 \times \Phi_0)/h^2 = \rho/(\epsilon_0 \epsilon_r) \quad (4)$$

$$(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3' + \Phi_4 - 4 \times \Phi_0)/h^2 = 0 \quad (5)$$

式(4)および式(5)を用いて、式(2)、式(3)から仮想点の電位 $\Phi_{3'}$ 、 $\Phi_{4'}$ を消去することができる。さらに、これらを式(1)に代入することにより、求めるべき2次元直交座標系についての差分式(6)が得られる。

$$\Phi_0 = [\Phi_1 + \Phi_2 + \{2\epsilon_r/(1+\epsilon_r)\}\Phi_3 + \{2/(1+\epsilon_r)\}\Phi_4 + \rho h^2/(\epsilon_0 + \epsilon_0 \epsilon_r)]/4 \quad (6)$$

式(6)右辺の $\rho h^2/(\epsilon_0 + \epsilon_0 \epsilon_r)$ が今回の方法により、Seeger の差分式に追加された。

3. Seeger の解および解析解との比較

解析的に静電場を求めることのできる以下に示す2例について、今回導いた差分式および Seeger の差分式を用いた静電場計算を実施し、結果を比較した。

3.1 無限に広い平板導体中の帯電油が形成する静電場

最も単純な条件として、無限に広い平坦な接地導体の間に帯電油と空気の2層が置かれているという、図2に示す1次元的配置についての計算を行った。導体間の距離を d_2 、帯電油の深さを d_1 とした時、平板導体間の底から x の位置の電位の解析解は、気層および油層のそ

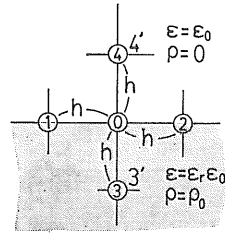


図1 格子点の配置

Fig. 1 Configuration of mesh points.

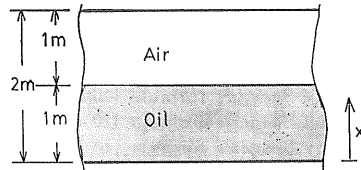


図2 比較のための計算を行った1次元の幾何学的配置

Fig. 2 Schematic diagram of one dimensional arrangement to which calculations are applied.

れぞれについて次式で与えられる。

油層 ($x < d_1$)

$$\Phi(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot x \left[x - \left\{ 2 + \frac{d_1}{(\epsilon_r - 1)d_1 - \epsilon_r d_2} \right\} d_1 \right]$$

気層 ($x > d_1$)

$$\Phi(x) = -\frac{\rho d_1^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{(x - d_2)}{(\epsilon_r - 1)d_1 - \epsilon_r d_2}$$

油の比誘電率が2、電荷密度が $1 \mu\text{C}/\text{m}^3$ 、枚の導体間の距離が2m、油層の厚さが1mの時の、2枚の導体間の各点での電位を、今回の差分式、Seegerの差分式および解析解により計算した結果を図3に示す。図中実線が解析解による計算結果を示している。

今回導いた差分式による計算では空間を10分割した。Seegerの差分式による計算では空間の分割数を10, 20, 40の3種類とした。

図3に示すように、今回求めた差分式を用いた場合には分割数が10であっても、ほぼ解析解と一致する。一方、Seegerの差分式では分割が粗い場合には十分な計算精度が得られず、分割数を40とした場合でも今回求めた差分式よりも計算精度が劣る。

3.2 縦置き円筒型タンク内の帯電油が形成する静電場

次に、図4に示すような一様に帯電した油が満たされた縦置き円筒型タンク内部に形成される静電場をそれぞれの差分式を適用して計算し結果を比較する。図4の軸対称3次元の境界条件については解析的に静電場が求め

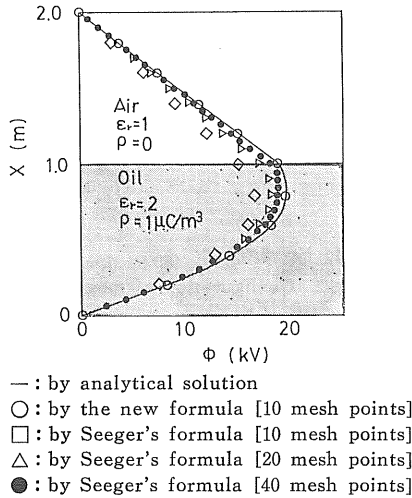


図3 各計算法による計算結果の比較
Fig. 3 Comparison of results obtained by each method.

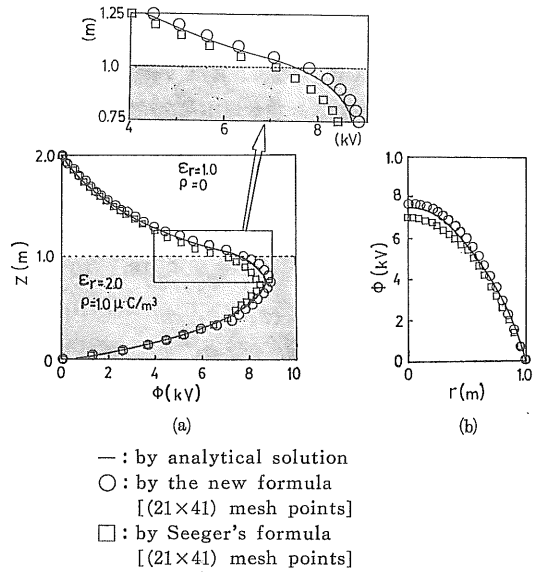


図5 各計算法による計算結果の比較
(a) 軸上の電位分布 (b) 油面上の電位分布
Fig. 5 Comparison of results obtained by each method.
(a) Potential distribution along axis.
(b) Potential distribution on oil surface.

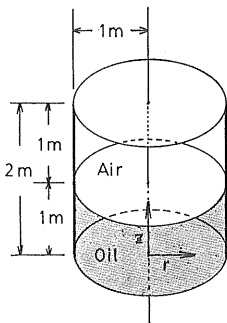


図4 比較のための計算を行った3次元の幾何学的配置
Fig. 4 Schematic diagram of three dimensional arrangement to which calculations are applied.

られている^{3,4)}, この計算では, タンクの高さを2m, 半径を1m, 油面の高さを1mとした。1次元での計算と同様に油の比誘電率は2, 電荷密度は $1\mu\text{C}/\text{m}^3$ とした。

図5が各方法により得られた計算結果である。図5(a)は回転対称軸上の位置と電位の関係を, 同図(b)は油面上での中心軸からの距離と電位の関係を示している。また, 両図中に実線で解析解⁴⁾による電位を示す。

数値計算における格子分割数は, 今回の差分式および Seeger の差分式のいずれについても, (21×41) とした。

両差分式による油面上での電位の計算結果を解析解と比較した場合, 今回の差分式では最も誤差の大きな格子点で解析解より2% 大きな値, 同じく Seeger の差分式では解析解より7% 小さな値となった。同じ格子分割

数で計算を行った場合, 軸対称3次元の問題に対しても今回の差分式の方が高い精度を与える。

4. ま と め

帯電した誘電体表面での電位計算を従来の Seeger の差分式で行うと, 計算途中で用いられる仮想電位の計算過程で誤差が生ずることが予測された。そこで, 仮想電位の計算方法を改良し新しく差分式を導いた。得られた差分式と従来の差分式を用いて, 解析的に静電が計算できる1次元および軸対称3次元の2種類の境界条件についての静電場計算を行い計算精度を比較した。

その結果, 同一格子分割数で比較した場合, 今回導いた差分式による方が Seeger の差分式によるよりも高い計算精度が得られることが示された。特に1次元の問題では, 誘電体中の電位分布が位置についての2次関数となるためか, 今回導いた差分式は, きわめて粗い格子分割でも十分に高い精度の計算結果を与えることが示された。

参 考 文 献

- 1) 浅野和俊, H. Krämer, G. Schön: 静電気学会誌, 1 (1977) 114
- 2) J.A. Seeger: Proc. IEEE (Lett.), 56 (1968) 1393
- 3) 美寺久光, 鳥取孝太郎: 電気学会雑誌, 89 (1969) 1970
- 4) K. Asano: Proc. IEE, 124 (1977) 1277