

論 文

流れの可視化による各種ボイド周辺の電界解析法

金古 喜代治*, 大山 龍一郎*, 田部井 秀幸*, 山崎 実*

(1988年1月16日受理)

Electric Field Analysis in and around Various Voids
by Fluid Flow Visualizations

K. KANEKO,* R. OHYAMA,* H. TABEI* and M. YAMAZAKI*

(Received January 16, 1988)

The fluid flow mappers method has been used as an important technique for simulating two dimensional and axially symmetric three dimensional electrostatic fields visually since the potential of electrostatic fields satisfies the same Laplace's equation as that of the pressure in fluid flow mappers if a Reynold's number is sufficiently small. In this paper we apply this method to analyze electric fields graphically in and around the various shape voids inside dielectrics in homogeneous fields. We compare the values of electric fields strengths and potentials evaluated by the numerical and analytical methods with that by the graphical method. Our results show that the fluid flow mappers can be extensively applied to the electric field analysis and should be a powerful tool to check the computational results of the electric fields.

1. まえがき

電界解析は、変圧器やガス絶縁開閉器などの高電圧機器の絶縁設計において、きわめて重要な要素技術である。高圧電気機器の絶縁物中にボイドや異物などが存在すると、その周辺部の電界が変歪して部分放電を生じ、電気機器の絶縁層を破壊に導く要因になる。良質で合理的な絶縁設計は、電気機器の小型化や軽量化を行なう上で、欠くことのできない基盤技術であって、電界解析の精度向上と解析手法の簡便化が要求されている。最近の大型電算機の急速な進歩と普及に伴って、有限要素法を始めとする各種の数値電界計算法が開発され、これまでに多くの研究成果を挙げてきた¹⁾。従来より、各種の電界解析に関しては、電界強度や電位分布を求めるこについてのみ、おもに検討されてきたのが現状である。しかしながら、高電圧機器の絶縁設計を行なう場合、解析場内の電界変化の様子を連続的に捉えながら、しかも電界の方向をも含めて解析することも必要にならう。

著者らは、従来より流体(20°Cの水)の流れ場を利用して、一般的のポテンシャル場を可視化することのできるfluid mapper装置を用い、二次元場²⁻⁶⁾ならびに軸対称

三次元場⁷⁾に対する複合誘電体境界面における静電界の解析について検討してきた。これまでには、おもに多媒質複合誘電体の直線状境界面近傍における電気力線、ならびに電束を可視化して、その電界の解析を行なう手法について検討を進めてきた。また、このfluid mapperを用いた流れの可視化に関する手法は、空間電荷を含むポアソン場に対しても適用することができる。著者らの一人は、高分子絶縁材料のtreeing破壊現象に関連して、針對平板電極間の針先端部分に空間電荷が分布する場合の針端近傍電界の解析に対して、fluid mapperを用いた手法を適用し、tree破壊特性に及ぼす空間電荷効果について考察している^{4,8)}。その結果、針電極先端に同極性の空間電荷が分布する場合、針端における電界緩和現象に関連した実験事実をfluid mapper装置により可視的に実証している。

これまで、fluid mapperを用いた電界解析法に関する報告²⁻¹¹⁾においては、図解析結果を有限要素法により数値計算した結果と比較することにより、単に解析結果の一貫性を定性的に示しているにすぎなかった。しかしながら、今後電界解析の手段としてfluid mapperを用いる場合において、電算機による数値解や理論的な解析解に対する解析誤差等に関しても定量的に評価・検討する必要があると考える。このような観点から、本論文では理論的に解析解を容易に得ることが可能な平等電界内の誘電体中に、誘電率の異なる各種のボイドが存在してい

* 東海大学工学部電気工学科 (259-12 平塚市北金目 1117)
Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, University of Tokai, 1117, Kitakaname, Hiratsuka, 259-12 Japan

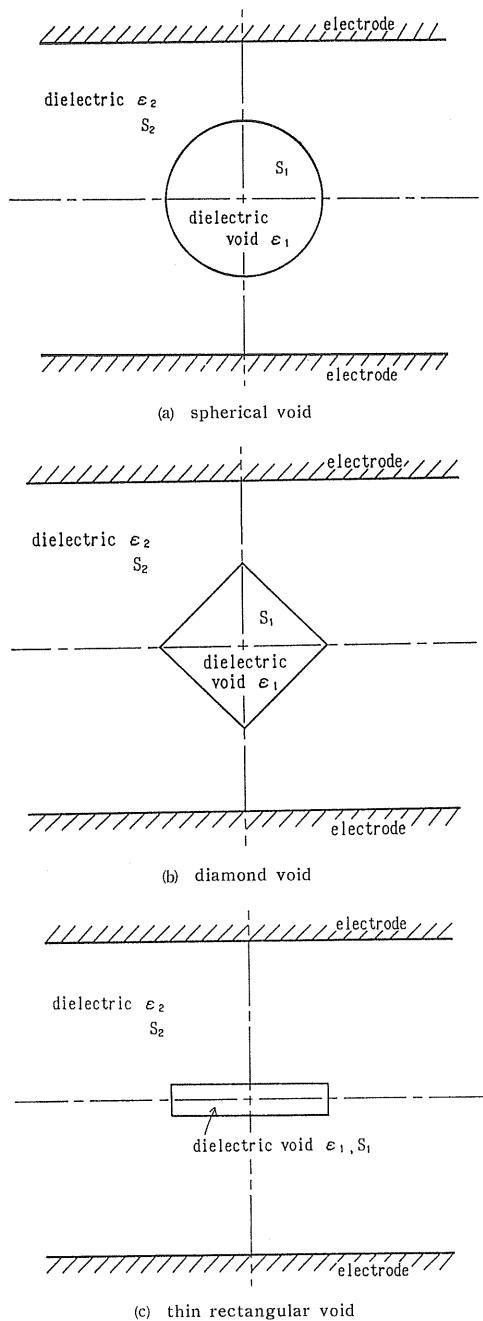


図1 平等電界中のボイド

Fig. 1 Dielectric void in uniform electric field.

る場合の二次元場の静電界を fluid mapper によりシミュレーションし、ボイド内およびその周辺における電界を可視化して解析した結果について述べている。さらに、fluid mapper により得られた解析結果を解析解ならびに数値計算結果と対比して、定量的に誤差評価を行な

っている。

2. Fluid mapper による電界の可視化法

Fluid mapper を用いたポテンシャル場の可視化法は、Moore⁹⁾によって提案された手法である。さらに福岡^{10,11)}は、この手法に関する基礎理論を確立して、各種応用面への端緒を開いた。Fluid mapper は石膏成型技術を用いるもので、石膏板面に流孔や開口端などを設けて、その成型された石膏板とガラス板の間に水の流れる狭い隙間、すなわち細隙流路を構成させるものである。細隙流路内の流体に圧力差を加えて、流孔より水を吹き出させ（あるいは吸い込ませ）、細隙流路内に定常流を形成させる。そして、この定常流を水に溶融する着色剤によって可視化している。Fluid mapper 装置に使用する石膏板の成型法と流れの可視化法については、すでに詳細な報告^{3,4)}をしているので、本論文では簡単に述べることにする。

本研究において fluid mapper による電界の解析対象としたものは、図1(a), (b), (c)に示すように、一様な誘電体 ϵ_2 内に、各種の形状をした誘電率 ϵ_1 のボイドが存在するものである。Fluid mapper によりポテンシャル場をシミュレーションする場合、誘電率の異なる媒質境界を表わすには、石膏板面上にステップを設ける必要がある^{3,5)}。このステップを設けることにより、誘電体の誘電率に対応した fluid mapper の流れの伝導率が得られるように、細隙流路内の細隙間隔 d を変化させていく。

図1に示すように、石膏板上でステップにより分けられた2領域 S_1, S_2 において、fluid mapper と静電界が、それぞれ対応する二次元の基礎方程式を対比して考えることにする。各領域に関して、流体の流れの密度 I ならびに流れ場の強さ F と静電界における電束密度 D および電界 E は、それぞれ Navier-Stokes の方程式を考慮することにより、次式のように表わすことができる。

$$I_{x,y} = \sigma F_{x,y}, \quad D_{x,y} = \epsilon E_{x,y}$$

$$F_{x,y} = -\text{grad } p_{x,y}, \quad E_{x,y} = -\text{grad } \phi_{x,y} \quad (1)$$

ただし、石膏板面を x, y で表わしている。ここで σ , p および ϵ, ϕ は、それぞれの各領域における流れの伝導率 ($\sigma = d^3/12 \mu$), 圧力, および静電界の誘電率, 電位を表わしている。

さらに、流れの密度 I と電束密度 D に関しては、それぞれ次のような連続の方程式が成立する。

$$\text{div } I_{x,y} = 0, \quad \text{div } D_{x,y} = 0 \quad (2)$$

いま、流れの伝導率 σ と誘電率 ϵ が一定であれば、各領域における流体の圧力 p と静電界の電位 ϕ は、次のよ

うなラプラスの方程式を満足する。

$$\nabla^2 p_{x,y} = 0, \quad \nabla^2 \phi_{x,y} = 0 \quad (3)$$

次に(1)~(3)式の関係より、fluid mapper と静電界の対応関係について考える。すなわち、fluid mapper における圧力 p と流れ場の強さ \mathbf{F} が、それぞれ静電界における電位 ϕ と電界 \mathbf{E} に対応していることがわかる。したがって、流れの密度 I は電束密度 D に対応することが容易に知ることができる。

Fluid mapper における細隙流路の間隙長 d と流れの伝導率 σ および誘電率 ϵ との関係は、それぞれ次式により与えられる。

$$\sigma_2/\sigma_1 = (d_2/d_1)^3, \quad \epsilon_2/\epsilon_1 = (d_2/d_1)^3 \quad (4)$$

したがって、(4)式の関係より

$$\sigma_2/\sigma_1 = \epsilon_2/\epsilon_1 = (d_2/d_1)^3 \quad (5)$$

を得ることができる。すでに述べたように、静電界における誘電率の比は、fluid mapper における伝導率の比に対応していることがわかる。石膏板のステップ部分に相当している境界、すなわち誘電率の異なるボイド境界の部分における fluid mapper と静電界の境界条件は、連続の条件により

$$\tan \alpha_2 / \tan \alpha_1 = \sigma_2 / \sigma_1, \quad \tan \theta_2 / \tan \theta_1 = \epsilon_2 / \epsilon_1 \quad (6)$$

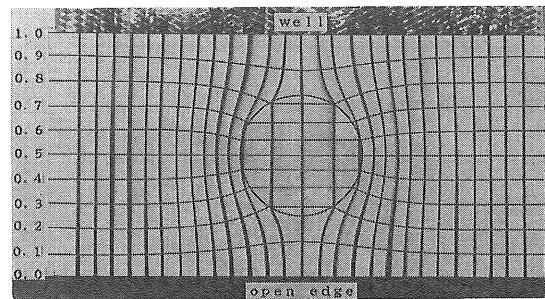
で表わせる。ここで α_1, α_2 および θ_1, θ_2 は、それぞれの各領域面において可視化された流線と電束線の屈折角を表わす。したがって、(6)式により次式の関係が得られる。

$$\tan \alpha_2 / \tan \alpha_1 = \tan \theta_2 / \tan \theta_1 \quad (7)$$

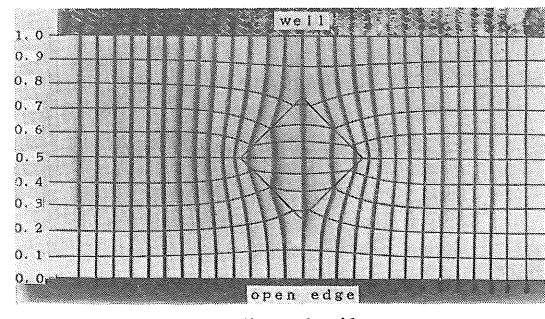
すなわち、fluid mapper で可視化される媒質境界面における流線の屈折角 α は、電束の屈折角 θ に一致することになる。

3. 流線図形の観測

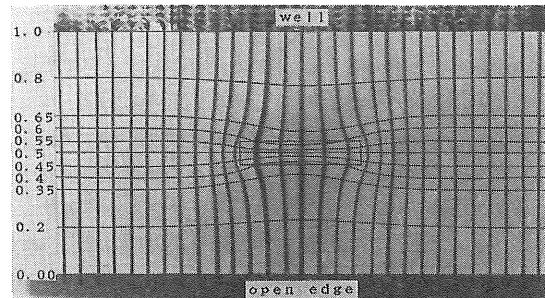
図 2 (a), (b), (c)には誘電率が $\epsilon_2=4$ である一様な誘電体内に $\epsilon_1=1$ の誘電率をもつ球形状ボイド、ひし形状ボイド、ならびに薄い矩形状ボイドが存在する場合に可視化された流線図形の写真を示す。また、同図には可視化された流線が静電界における電束を表わしているのかどうかを検証するために、有限要素法を用いて電算機により数値計算して得られた等電位線をも併せて示してある。図 2において、縦の線は fluid mapper により可視化した流線であり、横の線は電算機によって数値計算した等電位線を表わしている。電算機による数値計算の結果は、流孔端側（上部電極）の電位を $\phi_{\max}=1.0$ とし、開口端側（下部電極）の電位を $\phi_{\min}=0.0$ に規格化して、その間を 10 区分した相対電位により表わしている。有限要素法を適用するための要素分割は、とくにボイドの境界周辺で細かく分割して数値計算している。



(a) spherical void



(b) diamond void



(c) thin rectangular void

図 2 流線图形と等電位線图形の重ね合わせ图形 ($\epsilon_2/\epsilon_1=4$)

Fig. 2 Photograph obtained by superposition of analytical equipotential lines upon fluid flow lines ($\epsilon_2/\epsilon_1=4$).

図 2 からも明らかのように、fluid mapper により得られた流線図形は、流孔端や開口端においてよい直交性を有しており、各流線群は数値計算された等電位線に対して、それぞれきわめてよく直交していることがわかる。さらに解析領域の終端部分、すなわち fluid mapper の両側の流れ止めにおいても、流線が十分に平行しておらず、 $\partial \phi / \partial n = 0$ (n は境界上の任意の点にとった外向きの法線成分) の関係を満足している。このようなことを考慮すれば、fluid mapper によって可視化された流線は、ボイド内およびその周辺における電束を可視化しているものと考えられる。したがって、電算機により数値計算された結果と、fluid mapper から得られた流線図形とを照合することによって、電界の数値計算結果を簡単に検

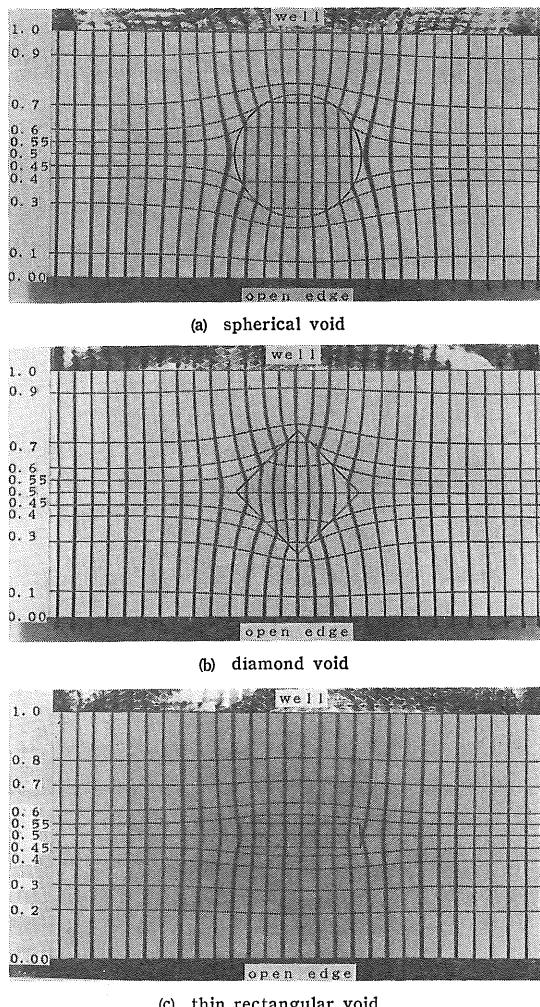


図3 流線图形と等電位線图形の重ね合わせ图形 ($\epsilon_2/\epsilon_1=1/4$)

Fig. 3 Photograph obtained by superposition of analytical equipotential lines upon fluid flow lines ($\epsilon_2/\epsilon_1=1/4$).

証することができる。また、図3(a), (b), (c)には図2の流線图形と対比するために、誘電率 $\epsilon_2=1$ の一様な誘電体内に $\epsilon_1=4$ の誘電率をもった各種ポイド周辺における流線图形を示す。

4. 流線图形の図解析

Moore は fluid mapper 装置により得られた二次元場の流線图形から、円入法により図式的にポテンシャル分布を求める方法を提案している⁹⁾。すでに、著者らは、電気力線(電束)图形に対応する二次元場の流線图形から、図解析的に電位分布を求める方法について、その概要と解析結果に関して報告している²⁻⁶⁾。以下に、この

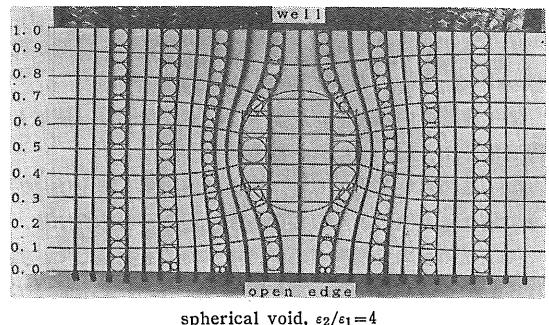


図4 流線图形と円入法による図式解析

Fig. 4 Flow line pattern and mapping analysis by circling-in method.

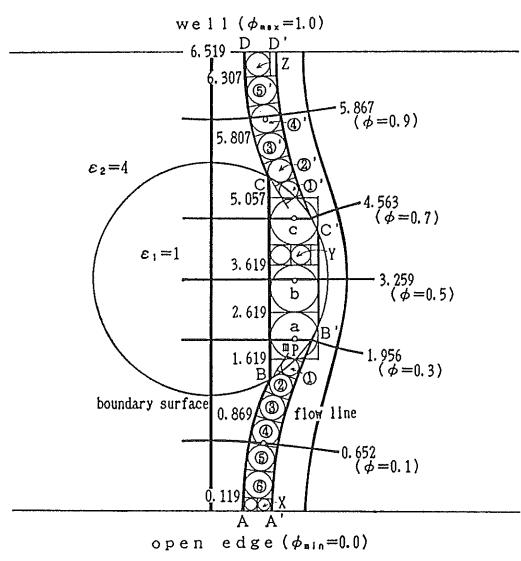


図5 円入法による図式解析

Fig. 5 Mapping analysis by circling-in method.

手法に関して具体的に述べる。

図4は誘電率比が $\epsilon_2/\epsilon_1=4$ である球形状ポイドにおいて、流線图形を図解析した例を示す。すなわち、ここでは流線群のうちから8本の流管を選んで円入法によって図解析し、開口端と流孔端間を $\phi_{min}=0.0$ より $\phi_{max}=1.0$ まで10区分して、各相対電位に対する等電位線を描いている。

流線图形を図式的に解析する方法については、すでに前報において詳細に報告している^{3,4)}。図5には、本実験において可視化されたポイド周辺における一つの流管を示す。すなわち、円入法は可視化された流線群のうちで、適当な流線間を選んで内接する円を描き、流線に対して垂直な弧をもつた弧状正方形と弧状長方形とに分割するものである。以下に、円入法による図解析の手順を

整理して記述する。

- (1) まず最初に、同図の下方部分において、任意の流線 AB を Bm のように延長した線を記入する。
- (2) 流管の中線とボイド境界の交点 p を通り、流線と直交するような一つの弧を描く。
- (3) この弧を基点にして、流線に内接する円を①～⑥まで描き、本例のように6個の弧状正方形を作図する。
- (4) この手順を順次ボイド内についても実施して、弧状正方形 a, b を描く。また同図の上方部分に対しても、同様に①'～⑥'およびcの弧状正方形を作図する。
- (5) このような手順を繰り返して、余った部分 X, Y, Z についても円を描き弧状正方形を作図する。さらに、最後に余った長方形の部分については、弧状長方形の中線の縦と横の比を求めて図解する。

ここで注意すべきことは、流管中に二つの媒質境界を含む場合には、境界面から中央の方向に向けて円入法を実施する必要がある。このようにして描かれた各弧は、一つの等電位線を構成している。実際には、弧状正方形ならびに弧状長方形が厚みをもっていることから、ここでは弧状立方体、ならびに弧状直方体として取り扱う必要がある。すなわち、弧状直方体においては細隙面に対して平行な方向に、縦横が同一の長さの比率をもった微少な直方体が直並列に同数だけ配列していることになる。また、弧状立方体においては細隙面に対して平行な方向に、微少な立方体が直並列に同数だけ配列していることから、それぞれの弧を2分する2本の中線の長さが、互いに等しいという性質がある⁹⁾。

いま、図6に示すような直方体のキャパシタンスは、次式により表わすことができる。

$$C = \epsilon (m \cdot t / l) \quad (8)$$

一方、本実験により得られた流線図形は、紙面に垂直な方向に対して流管の厚みが一定であるから、弧状直方体のキャパシタンスは $C_0 = \epsilon m / l$ で表わすことができる。また、弧状立方体のキャパシタンスは、前述した性質により、 $C_0 = \epsilon$ で表わすことができる。このようにして求められたそれぞれの弧状立方体および弧状直方体のキャパシタンスから、図7のように各キャパシタンスの直並列接続であると考えて、流管を相対的に評価する。

図5において流管の両端にかかる電位差は、流管全体を分割した $AA' \sim DD'$ までの電位差の総和として求められる。すなわち、各媒質ごとのキャパシタンスを算定した結果、それぞれ各部分において $AA' \sim BB' = 0.618$, $BB' \sim CC' = 0.292$, および $CC' \sim DD' = 0.684$ の値であった。したがって、流管全体の合成キャパシタンス C_T は

$$C_T = 1 / \sum (1/C_0) = 0.153 \quad (\text{rel. F}) \quad (9)$$

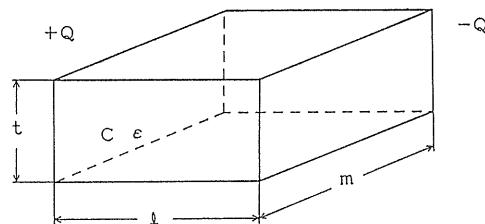


図6 直方体のキャパシタンス

Fig. 6 Capacitance of rectangular volume.

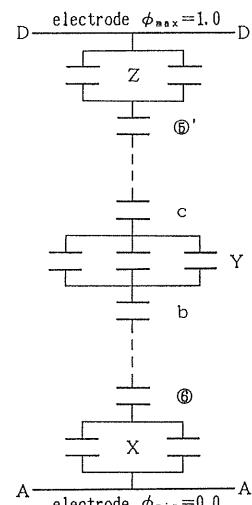


図7 流管におけるキャパシタンスの等価回路

Fig. 7 Equivalent circuit to capacitance of stream tube.

のように求めることができる。ここで、 C_0 は流管を分割した各部分①～⑥、①'～⑥'、a～c および X～Z の相対的なキャパシタンスを表わしている。また、(9)式における合成キャパシタンス C_T の単位 rel. F は、相対的なキャパシタンスを意味している。ここで、誘電率 $\epsilon = 1$ の媒質内における1個の弧状正方形のもつ相対キャパシタンスのことを 1 rel. F と定義している³⁾。

一つの流管において、静電界のアナロジを用いれば

$$\phi = (1/C_T) \psi \quad (10)$$

の関係が成立する。ここで、 $\psi(V)$ は流管の両端にかかる電位差、 $\psi(C)$ は流管を通る電束、 C_T は流管の両端間のキャパシタンスである。任意の流管について、電束 ψ は一定であるから、電位差 ϕ は合成キャパシタンスの逆数に比例する。したがって、流管全体の $1/C_T$ に対する部分流管の $1/C_0$ の比率は、流管全体の電位差に対する部分流管の比率を表わすことになる。したがって、各流管の同じ電位差比率の点を結んでゆけば、その比率の等電位線とすることができる。

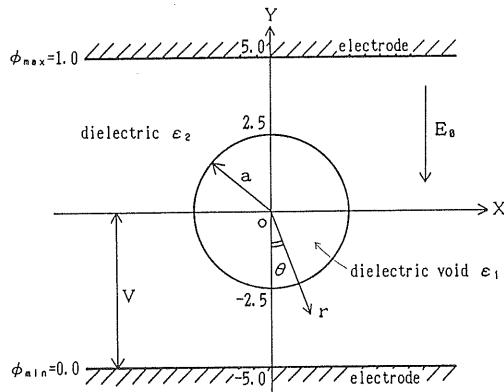


図8 球形状ボイドにおける解析領域

Fig. 8 Analytical region for spherical void.

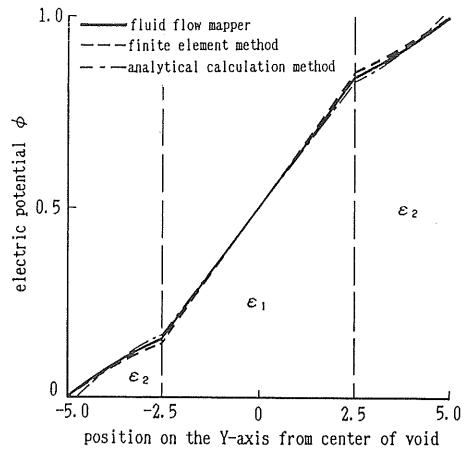
たとえば、上部平板電極（流孔）の電位を $\phi_{\max}=1.0$ として、下部平板電極側（開口端）における電位を $\phi_{\min}=0.0$ とする場合、相対電位 $\phi=0.5$ に相当する位置は、図5に示すように $1/C_T \times 0.5 = 3.259$ として算定することができる。すなわち、同図において、流管を開口端から始めて $X \rightarrow ⑥ \rightarrow ① \rightarrow a$ の方向に向けて順次算定し、その間の相対キャパシタンスの逆数の和を求める。本例において、その値は 2.619 である。この値を(10)式により算定された値より差し引くことにより、 $3.259 - 2.619 = 0.64$ の値が得られる。したがって、弧状正方形 b のもつ相対キャパシタンスが、前に述べた定義により 1 rel. F であることから、b 内の下側より 64% の位置が相対電位 $\phi=0.5$ の位置に相当することになる。同図には、このような手順によって算定された数値を示している。

5. 検討と考察

本章では、流線図形の図解析結果を定量的に評価するために、球形状ボイドを例としてボイド内外の電位分布、ならびに電界を各種の方法により求めて考察する。いま、図8に示すように、球形状ボイド内の原点Oを中心としてY軸上の電位を、以下に示すような3種類の解析方法により求めた。すなわち

- (1) fluid mapper による流線図形の図解析結果
- (2) 有限要素法を用いた電算機による数値計算結果
- (3) 解析的方法による計算結果¹²⁾

(1)および(2)による解析法に関しては、すでに前章までに詳しく述べたので、ここでは(3)の解析的方法についての概略を説明する。球形状ボイド内外の任意の位置における電位は、以下に示す方程式により解析解を求めていく。すなわち、平等電界 $E₀$ 内に置かれた誘電率 $ε₂$ の

図9 球形状ボイドの電位分布 ($ε₂/ε₁=4$)Fig. 9 Electric potential distribution on spherical void ($ε₂/ε₁=4$).

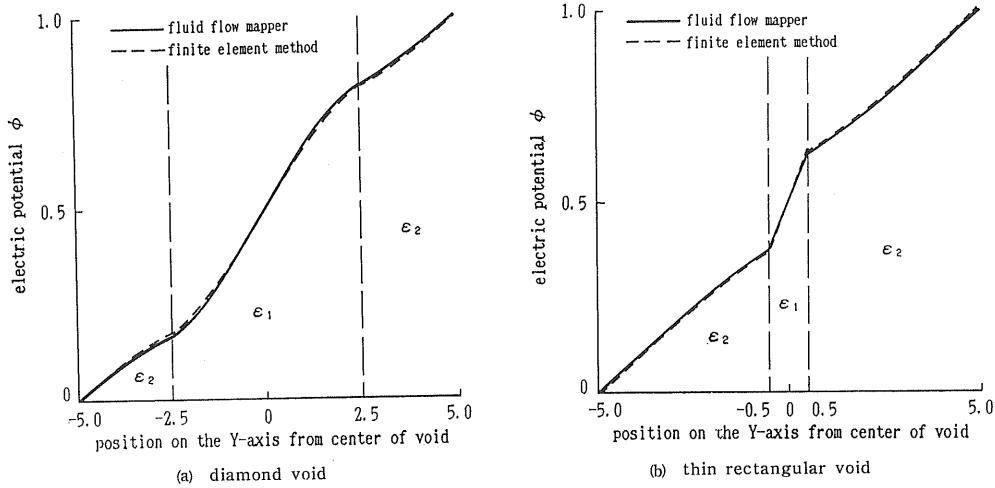
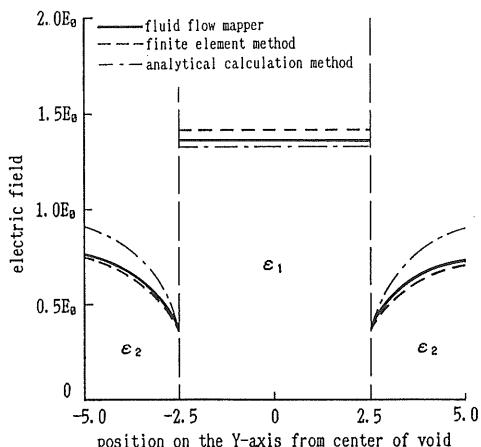
一様な誘電体内に、誘電率 $ε₁$ で半径 a の球形状ボイドがある場合、中心軸上の原点OでY軸と角 $θ$ をなした任意の距離 r のボイド内の電位 V_i は、原点Oと電極間の電位差を V として、次式により求めることができる。

$$V_i = V - \{3 \cdot ε₂ / (ε₁ + 2 \cdot ε₂)\} E₀ \cdot r \cos θ, \quad (r \leq a) \quad (11)$$

また、ボイド外における電位 V_0 は

$$V_0 = V - [1 - \{(ε₁ - ε₂) / (ε₁ + 2 \cdot ε₂)\}] \cdot (a³ / r³) \times E₀ \cdot r \cos θ, \quad (r > a) \quad (12)$$

図9には、誘電率比が $ε₂/ε₁=4$ の場合における球形状ボイド内外の電位値を、原点Oを通る縦の中心軸Yに対して、それぞれ(1), (2)および(3)の各方法で求めた結果を示す。図からも明らかなように、これら3種類の方法で求めた結果は、(1)と(3)の方法による最大誤差が 1.96% であり、(2)と(3)の方法による最大誤差が 2.85% であった。この結果、きわめてよく一致した電位値が得られていることがわかった。同様に図10(a), (b)にはひし形状ボイド、ならびに薄い矩形状ボイドの場合について、流線の図解析結果による電位値と有限要素法により数値計算された電位値とを比較した結果を示す。また図11には、球形状ボイドにおける各電位値を数値微分することによって求めた電界分布を示している。同図には、電極間に加えた平等電界 $E₀$ に対して、ボイドの中心OからY軸上にとった任意目盛りの位置における電界分布を示している。ボイド外の電界分布について、流線図形の図解析結果と電算機によって数値計算した結果を対比したところ、その最大誤差が 1.32% であり、ほとんどよく一致した値が得られている。一方、(3)の解析解による方法で求められた結果は、やや高めの電界分布が得られている。

図 10 ひし形状ボイドと薄い矩形状ボイドの電位分布 ($\epsilon_2/\epsilon_1=4$)Fig. 10 Electric potential distribution on diamond void and thin rectangular void ($\epsilon_2/\epsilon_1=4$).図 11 球形状ボイドの電位分布 ($\epsilon_2/\epsilon_1=4$)Fig. 11 Electric field distribution on spherical void ($\epsilon_2/\epsilon_1=4$).

る。また、ボイド内の電界分布は一定であって、各種の計算手段により求められた値は、(1)と(3)の方法による最大誤差が 2.26% であり、(2)と(3)の方法による最大誤差が 6.77% であった。このことはボイド内の電位が比較的急激に変化しているために、わずかな電位値の傾きの変化が数値微分の結果に大きな影響を与えているものと考えられる。

6. む す び

本論文は、流れの可視化技術である fluid mapper を用いて球形状ボイド、ひし形状ボイド、ならびに薄い矩形状ボイド内外周辺の二次元の静電界を可視化して、そ

の可視化された流線図形からボイド内外の電位・電界分布を解析する技術手法について述べたものである。

Fluid mapper を用いた電界の可視化法は、ポテンシャル場の電界の様子を全体的に、しかも変化の様子を連続的に観測することのできる利点がある。さらに、この方法は、常に解析場の電界の変化を捉えながら解析できるという有用性をもっている。Fluid mapper により可視化した流線図形を図解析することによって求めた電界強度を電算機による数値解析、ならびに解析解の結果と対比したところ、その最大誤差が 1.32~6.77% の範囲であった。すなわち、三つの各手法により解析した結果は比較的よく一致していることがわかった。したがって、電算機により数値計算を行なう場合、本手法を併用することによって、常に電界の全般的な様子を捉えながら数値計算の結果を予測することが可能である。さらに、電算機により得られた解析結果の妥当性を検証するのにも有効であると考えられる。また、本手法は特異点を含むような解析場において、数値計算結果を補足的に修正することができ、計算処理の高効率化に有効な手段となるものと考えられる。

現在著者らは、この手法を適用して軸対称三次元におけるラプラス場⁷⁾、ならびにポアソン場についての電界解析の手法を検討している。Fluid mapper を用いた電界の可視化法は、石膏成型技術を用いているために、解析場に応じて比較的簡単に、任意の形状の石膏板を成型することが可能である。さらに、その操作も簡単なことから、かなり複雑な電極系を有するポテンシャル場の電界・電位分布解析に対しても、容易に適用することができる。

終わりにあたり、本研究に関連して種々ご懇切なご指導とご教示を賜っている名古屋大学工学部家田正之教授、ならびに本学工学部松元崇教授に心より深く感謝いたします。また、流れの可視化技術に関して、多くの貴重なご教示をいただいた本学工学部札幌教養部（現北海道東海大学工学部）福岡醇一教授、本学工学部生産機械工学科中山泰喜教授に対して感謝いたします。

参考文献

- 1) 河野照哉、宅間 董：数値電界計算法、コロナ社(1980)
- 2) 金古喜代治、大村英之：静電気学会講演論文集'86, p. 309, 静電気学会(1986)
- 3) 金古喜代治、福岡醇一、松元 崇、大村英之、立野利浩：静電気学会誌, 11 (1987) 29
- 4) 金古喜代治、福岡醇一：電気学会論文誌A, 106 (1987) 49
- 5) 金古喜代治、大村英之、福岡醇一、松元 崇：同上, 106 (1987) 221
- 6) 金古喜代治、大山龍一郎：流れの可視化, 7, 26 (1987) 239
- 7) 大山龍一郎、金古喜代治：電気学会論文誌A, 108 (1988) 375
- 8) 金古喜代治：電気学会論文誌A, 105 (1985) 565
- 9) A.D. Moore : AIEE Trans., 71 (1952) 1
- 10) 福岡醇一：フリード・マッパー—流れの可視化による電界磁界の解析—、北海道大学図書刊行会(1983)
- 11) 福岡醇一：静電気学会誌, 2 (1978) 224
- 12) 竹山説三：電磁気学現象理論, p. 94, 丸善(1944)