

論 文

一次元運動電荷による電流

三好和憲*, 水野積成**, 関谷昌久***, 三好保憲****

(1987年2月21日受理)

Electric Current due to a Moving Charge in One-dimensional System :
Field, Energy and Force

K. MIYOSHI,* M. MIZUNO,** Y. SEKIYA*** and Y. MIYOSHI****

(Received February 21, 1986)

The fundamental formula for current due to a moving point charge between two conductors was proposed in 1932 by Engel and Steenbeck (E·S) in their famous book. In 1976, Brignell and Evison (B·E) asserted that E·S's method was erroneous since a change in potential energy (PE) was not taken into account in their energy-balance equation. The present authors analyzed such a one-dimensional moving-charge system (a moving charged conductor plate or a moving volume charge layer between parallel plate electrodes), a generalized one of B·E's. As a result, the following subjects have become clear. 1. Work done or kinetic energy (KE) consumption consists of the apparent KE due to applied field and a latent KE. 2. The latent KE and a PE increase are cancelled out each other. Therefore, E·S's method can bring an exact solution as expected.

1. ま え が き

図1に示すような陽極A (電位 V_1), 陰極C (電位 0) 間の点P (位置 s) にあり速度 v で運動しつつある点電荷 q によって外部回路 (CV1A) に誘導される運動電流 I は次式によって表わされる^{1,2)}.

$$I = q\{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})/V_1\} \quad (1)^{*1}$$

$$= q \cdot (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v}) \quad (1')$$

ここに

\mathbf{E} (V/m) : 印加電圧 V_1 に対するP点の静電界.

\mathbf{e}_1 (1/m) : AC間に単位電圧 (1V) が印加された場合におけるP点の静電界, 次元は $[L^{-1}]$. 電極形状および配置が定められた条件の下では, 点Pの位置だけの関数となり印加電圧には無関係.

E·S定理は以下に示すようにエネルギー・バランス原理を基として導かれた. すなわち, 時刻 t に位置 $P(s)$ にあった点電荷 q が時刻 $t+dt$ には $P'(s+ds)$ に移ったとしよう. この間に電源から供給されたエネルギーは

$$dW_U = V_1 I dt, \quad (2a)$$

点電荷の運動のために消費されたエネルギーは

$$dW_K = (q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt), \quad (2b)$$

これらを等置して

$$dW_U = dW_K : V_1 I dt = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) dt. \quad (2)$$

これよりただちに E·S 定理の式(1)がもたらされる.

このような基本定理は真空および気体中の運動電荷に関する基礎的課題を解明する重要なものである. それゆえ, 気体放電³⁾, 液体中電導⁴⁾などの参考書ならびに電磁気学⁵⁾さらには高電圧現象⁶⁾関係の成書に広く引用されてきた.

* 筑波大学電子情報工学系 (305 茨城県新治郡桜村)
現在: 工学院大学 (160 東京都新宿区西新宿)
Department of Electronics and Information Science, University of Tsukuba, Sakura-mura, Niihari-gun, Ibaraki, 305 Japan
Present address: Kogakuin University, Nishi-Shinjuku, Shinjuku-ku, Tokyo, 160 Japan

** 名古屋大学工学部原子核工学科 (464 名古屋市千種区不老町)
現在: 名古屋女子商科短期大学 (488 尾張旭市新居町)
Department of Nuclear Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464 Japan
Present address: Nagoya Women's Junior College of Commerce, Arai-cho, Owariasahi, 488 Japan

*** 大同工業大学電気工学科 (457 名古屋市南区大同町)
Department of Electrical Engineering, Daido Institute of Technology, Daido-cho, Minami-ku, Nagoya, 457 Japan

**** 名古屋工業大学名誉教授 (466 名古屋市昭和区御器所町)
Professor Emeritus, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya, 466 Japan

*1 提唱者に因んで Engel·Steenbeck (E·S と略記) の定理と呼ぶことにする.

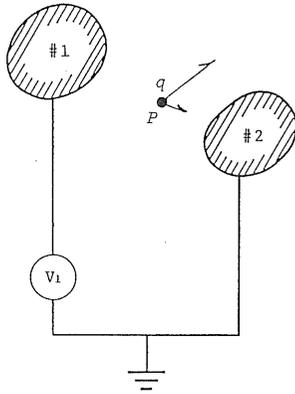


図1 2 導体間の運動点電荷 (Engel-Steenbeck 理論の説明のため)

Fig. 1 A moving point charge between 2 conductors (For the explanation of the theory by Engel-Steenbeck).

E・S の場合には 2 導体間の運動点電荷が対象であったが、その後 Shockley⁷⁾, Ramo⁸⁾ が独立に相次いで任意数の導体というきわめて一般的な導体系空間の運動点電荷を対象とし誘導電流に関する一般的な定理を導いた。これは発表論文からわかるように E・S より 6~7 年後のことである。その後、このような電流表式についての基礎的研究は途絶えていたが、1973 年に至って Brignell・Evison⁹⁾ (以降 B・E と略記) は、「E・S の方法はポテンシャルエネルギー (potential energy, PE と略記) の変化を考慮に入れていないから根本的に誤りである」

と断定し、「この解法が広く読まれている書^{*2)}に掲載されているから fundamental textbook error である」とまで極言している。しかし B・Eこそ静電気学の根本的常識の欠如とも思われる誤りを犯している (付録参照)。

筆者らは B・E が提示した疑問を氷解するために、図 2 に示すような一次元系を対象とし PE を考慮したエネルギー・バランス法を検討してみた。本論文はその解析的研究の報告である。

2. 解析対象となる一次元的運動電荷系

図 2(a)(b) はともに平行板電極 A (電位 \$U\$) および C (電位 0) の間に、これらと平行に運動電荷が存在する系を示す。図(a)のほうの運動電荷は完全導体 (導電率 \$\epsilon \rightarrow \infty\$) B の両面 \$B_1, B_2\$ 上の板面電荷 (それぞれ平等面密度, \$\omega_1, -\omega_2\$) である。また図(b)のほうの運動電荷層 R は空間電荷 (平等体密度, \$\rho\$) である。A, C, B および R の横拡がり面積は等しく \$S\$ であり、極間距離 \$l\$ に比べ \$l^2 \ll S\$ とする。すなわち端効果が無視され、すべての量は電極面に垂直な \$y\$ 軸 (A は \$y=0\$, C は \$y=l\$) だけの関数となり、一次元系をなす。B および R の位置は図示のように \$y=\eta \sim \eta+a\$ にわたる。したがって運動電荷が同一の \$q\$ である場合には、

図(a)の導体帯電に対しては $\sigma = q/S = \omega_1 - \omega_2$: 既知

図(b)の空間電荷に対しては $\rho = q/(aS)$: 既知

また電荷の運動方向を \$y\$ 方向にとれば、その速さは

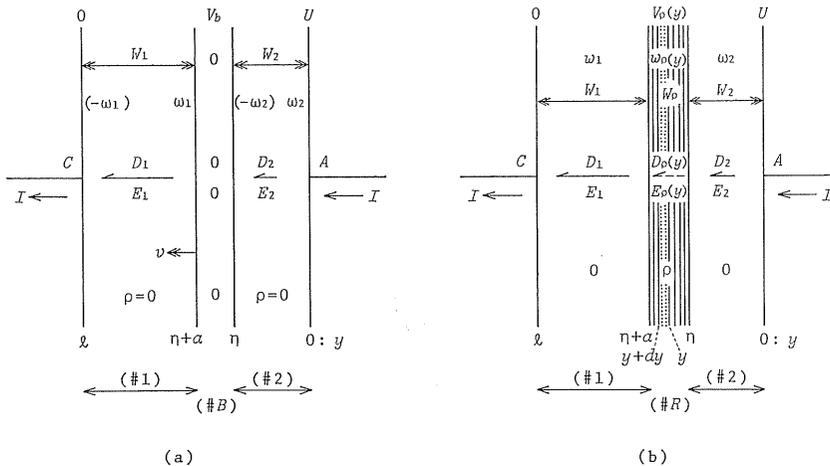


図 2 平行板電極間の帯電導体板(a)および空間電荷層(b)

Fig. 2 Charged conductor plate (a) and space charge layer (b) between parallel plate electrodes.

*2 本報告の文献 3, 4).

$$v = -\frac{d\eta}{dt} \quad (3)$$

それゆえ、電荷の運動によって時間的に変化する量に対する演算としては

$$\frac{d}{dt} = v \frac{d}{d\eta} \quad (3')$$

なお電極間は図2(a)および(b)についてはそれぞれ表1の #1, #B, #2 および表2の #1, #R, #2 の3領域に分類される。

3. 一次元運動電荷系の電界および電流

3.1 運動帯電導体板

運動帯電板Bを完全導体と考えているから導電率, $\kappa \rightarrow \infty$, 内部電界, $E_b \rightarrow 0$. 与えられた電荷面密度 $\sigma (= q/S)$ が導体板の両面 B_1 (#1側), B_2 (#2側)にそれぞれ分かれて $\omega_1, -\omega_2$ となって $E_\sigma = 0$ をもたす. もちろん, このような電気一重層の境界面 B_1, B_2 では電位 V は連続であり, 電界 E は不連続である.

求めるべき未知量として #1, #2 両域の電界 E_1, E_2 をとれば, 電気変位 (電束密度) と面電荷密度との関係から, $\epsilon_0 E_1 = \omega_1, \epsilon_0 E_2 = \omega_2$. したがって与えられた既知量 σ に対して

$$\epsilon_0 (E_1 - E_2) = \sigma \quad (4)$$

また既知の電位差 U に対して

$$E_1(l - \eta - a) + E_2\eta = U. \quad (5)$$

上記の2式から電界 E_1, E_2 が決定される. さらに2領域の電束密度 $D_1 = \epsilon_0 E_1, D_2 = \epsilon_0 E_2$, 変位電流密度 J_{D1}, J_{D2} が決定される. 電流の連続性から #B の伝導電流密度 J_K も相隣の領域の電流密度に同調し, 同一値に納まる. これら各量が表1に整理されている. さらに電位は表3に記述されている.

なお D_1, D_2 に式(3')の演算を施してただちに変位電流密度 J_{D1}, J_{D2} が導かれる. もちろん両者は同形であって, それはまた #B の伝導電流密度 J_K と一致すべきである. これらもすべて表1に列記されている.

この場合の電流は電流密度からただちに求められ, 後掲の付表2に記載されている. すなわち

$$I = JS = qv/(l-a) \quad (1a)$$

3.2 運動空間電荷層

電荷の存在する領域 #R では Poisson 式, また電荷の存在しない #1, #2 域では Laplace 式が成立. 一次元系であるから, 電位 V は y だけの関数 $V(y)$ となり,

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \begin{cases} 0 & , l \geq y \geq \eta + a \cdots V_1(y) \\ -\rho/\epsilon_0 & , \eta + a \geq y \geq \eta \cdots V_\rho(y) \\ 0 & , \eta \geq y \geq 0 \cdots V_2(y) \end{cases} \quad (6)$$

体分布電荷であるから各域の境界において電位 V , 電界

E は連続, また C, A の電位が与えられているから, 次のような境界条件が成立する.

$$\begin{aligned} V_1(\eta + a) &= V_\rho(\eta + a), \quad V_\rho(\eta) = V_2(\eta) \\ -E_1 &= V_1'(\eta + a) = V_\rho'(\eta + a), \quad V_\rho'(\eta) = V_2'(\eta) = -E_2 \\ V_1(l) &= 0, \quad V_2(0) = U \end{aligned} \quad (7)$$

方程式(6)を境界条件(7)を用いて解いた結果のうち, 電界の式については表2に, また電位の式については表4に示されている.

各域 #1, #2 および #R の電界から電束密度 D_1, D_2 および $D_\rho = \epsilon_0 E_\rho$ が得られるから, それらによる変位電流密度 J_{D1}, J_{D2} および $J_{D\rho}$ もただちに導かれる. #R には, さらに対流電流密度 J_C があり, これを考えると当然のことながら各域の電流密度は同一表式に落ちつく. これらのことがらは表2に列記されている.

この場合の電流も $I = JS$ として, 付表2に記述されている. すなわち

$$I = qv/l \quad (1b)$$

4. 一次元電荷系のポテンシャル・エネルギー

4.1 一次元電荷系の電界エネルギー

誘電率 ϵ の媒質 (medium) の電界が E である場合には熟知のように $w = (1/2)\epsilon E^2$ の密度でエネルギーが蓄えられている. それゆえ考えている系の空間が n 個の領域に分かれ, # k 域の媒質の誘電率が ϵ_k , その電界が E_k であるとすれば, この系全体としての電界エネルギー (静電エネルギー) は

$$W_P = \sum_{k=1}^n W_k; \quad W_k = \iiint_{(\tau_k)} w_k d\tau_k, \quad w_k = \frac{1}{2} \epsilon_k E_k^2 \quad (8)$$

τ_k : # k 域の全体積

$d\tau_k$: # k 域の素体積 (elementary volume)

このエネルギーは, 次章に述べる運動エネルギーと対比して系のポテンシャル・エネルギー (potential energy, PE と略記) と考えられるため, 脚字 P が付けられている. 表1および表2には, それぞれ図2(a)および(b)について上述の立場からのエネルギー表現が列記されている.

他方, この系が m 個の導体群から成っており, # h 番目の導体の電荷が Q_h , 電位が V_h である場合には, これまた熟知のように, この導体に $W_h = (1/2)Q_h V_h$ が蓄えられており, したがって系全体の電界エネルギーは導体群に蓄えられておるものと見なし, 次式をもって代表している.

$$W_P = \sum_{h=1}^m W_h; \quad W_h = (1/2)Q_h V_h \quad (9)$$

表3および表4には, それぞれ図2(a)および(b)について

表1 平行平板電極間の運動帯電導体板による静電的諸量および電流密度
 Table 1 Electrostatic quantities (electric field and others) and current density due to charged plate conductor moving in parallel plate electrodes.

Region	#1	#B	#2
Range	between C and B ₁ $l \geq y > \eta + a$	between B ₁ and B ₂ $\eta + a > y > \eta$	between B ₂ and A $\eta > y \geq 0$
Surface charge density	on C: $-\omega_1$	on B ₁ : ω_1	on A: ω_2
Field intensity	$E_1 = \omega_1/\epsilon_0 = D_1/\epsilon_0$ $= E_a + (\sigma/\epsilon_0) \cdot (\eta/(l-a))$	$E_b = 0$	$E_2 = \omega_2/\epsilon_0 = D_2/\epsilon_0$ $= E_a - (\sigma/\epsilon_0) \cdot ((l-a-\eta)/(l-a))$
Displacement current density	$J_{D1} = dD_1/dt = \sigma v/(l-a)$	0	$J_{D2} = dD_2/dt = \sigma v/(l-a)$
Conduction current density	0	$J_K = \lim_{\kappa \rightarrow \infty, E_b \rightarrow 0} (\kappa E_b) = \sigma v/(l-a)$	0
Total current density	$J = J_D + J_K = \frac{\sigma v}{(l-a)}$		
Energy density	$w_1 = \frac{1}{2} E_1 D_1$ $= \frac{1}{2\epsilon_0} \{ D_a^2 + 2D_a \sigma (\eta/(l-a)) + \sigma^2 (\eta/(l-a))^2 \}$	$w_b = 0$	$w_2 = \frac{1}{2} E_2 D_2$ $= \frac{1}{2\epsilon_0} \{ D_a^2 - 2D_a \sigma ((l-\eta-a)/(l-a)) + \sigma^2 ((l-\eta-a)/(l-a))^2 \}$
Energy (in region)	$W_1 = w_1(l-\eta-a)S$ $= \frac{(l-\eta-a)S}{2\epsilon_0} \left\{ D_a^2 + 2D_a \sigma \left(\frac{\eta}{l-a} \right) + \sigma^2 \left(\frac{\eta}{l-a} \right)^2 \right\}$	$W_b = 0$	$W_2 = w_2 \eta S$ $= \frac{\eta S}{2\epsilon_0} \left\{ D_a^2 - 2D_a \sigma \left(\frac{l-\eta-a}{l-a} \right) + \sigma^2 \left(\frac{l-\eta-a}{l-a} \right)^2 \right\}$
Energy (total)	$W_P = W_1 + W_b + W_2 = W_a + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\eta(l-\eta-a)}{l-a} \cdot S = \left\{ \frac{\epsilon_0 E_a^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\eta(l-\eta-a)}{(l-a)^2} \right\} (l-a)S$		

Notice: $E_a = U/(l-a)$, $D_a = \epsilon_0 E_a$; $w_a = \frac{1}{2} E_a D_a$, $W_a = w_a(l-a)S$

表2 平行平板電極間の運動空間電荷層による静電的諸量および電流密度
 Table 2 Electrostatic quantities (electric field and others) and current density due to space charge layer moving in parallel plate electrodes.

Region	#1 ($l \geq y \geq \eta + a$)	#R ($\eta + a \geq y \geq \eta$)	#2 ($\eta \geq y \geq 0$)
Volume charge density	0	ρ	0
Surface charge density	on C : $-\omega_1$	on R1 : 0	on R2 : 0
Field intensity	$E_1 = \omega_1/\epsilon_0 = D_1/\epsilon_0 = \bar{E} + (\rho a/\epsilon_0)\beta$	$E_r(y) = D_r(y)/\epsilon_0 = \bar{E} - (\rho a/\epsilon_0)(1-\beta) + (\rho/\epsilon_0) \cdot (y-\eta)$	$E_2 = \omega_2/\epsilon_0 = D_2/\epsilon_0 = \bar{E} - (\rho a/\epsilon_0)(1-\beta)$
Displacement current density	$J_{D1} = dD_1/dt = \rho v \cdot (a/l)$	$J_{Dr} = dD_r/dt = \rho v (-1 + a/l)$	$J_{D2} = dD_2/dt = \rho v (a/l)$
Convection current density	0	$J_c = \rho v$	0
Total current density	$J = J_D + J_c = \rho v (a/l)$		
Energy density	$w_1 = \frac{1}{2} E_1 D_1$ $= \frac{1}{2\epsilon_0} \{ \bar{D}^2 + 2\bar{D}(\rho a\beta) + (\rho a\beta)^2 \}$	$w_r = \frac{1}{2} E_r D_r$ $= \frac{1}{2\epsilon_0} [\{ \bar{D} - (\rho a)(1-\beta) - \eta\rho \}^2 + 2\{ \bar{D} - (\rho a)(1-\beta) - \eta\rho \} (\rho y) + (\rho y)^2]$	$w_2 = \frac{1}{2} E_2 D_2$ $= \frac{1}{2\epsilon_0} \{ \bar{D}^2 - 2\bar{D}(\rho a)(1-\beta) + (\rho a)^2(1-\beta)^2 \}$
Energy (in region)	$W_1 = w_1(l-\eta-a)S$ $= \frac{(l-\eta-a)S}{2\epsilon_0} \{ \bar{D}^2 + 2\bar{D}(\rho a\beta) + (\rho a\beta)^2 \}$	$W_r = S \int_{\eta}^{\eta+a} w_r dy$ $= \frac{aS}{2\epsilon_0} [\bar{D}^2 - \bar{D}(\rho a)(1-2\beta) + (\rho a)^2 \{ \frac{1}{3} - \beta(1-\beta) \}]$	$W_2 = w_2\eta S$ $= \frac{\eta S}{2\epsilon_0} \{ \bar{D}^2 - 2\bar{D}(\rho a)(1-\beta) + (\rho a)^2(1-\beta)^2 \}$
Energy (total)	$W^2 = W_1 + W_r + W_2 = \bar{W} + \frac{1}{2\epsilon_0} (\rho a)^2 \left\{ \frac{a}{3} + \eta - \beta^2 l \right\} S = \frac{1}{2} \bar{E} \bar{D} \cdot (lS) + \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \beta \right) \left(1 - \frac{a}{l} \right) \frac{\eta^2}{a} (aS)$		

Notice : $\bar{E} = U/l$, $\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}$; $\beta = \left(\eta + \frac{a}{2} \right) / l$; $\bar{W} = \frac{1}{2} \bar{E} \bar{D} \cdot (lS) = \frac{1}{2} \bar{C} U^2$

表3 一次元帯電導体系における電位, 電荷およびエネルギー
Table 3 Electric potential, charge and energy of charged conductor plate between parallel plate electrodes.

Region	#1	#B	#2
Potential	$V_1(y) = E_0 \cdot (l-y) = \left(U + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \eta \right) \cdot \frac{l-y}{l-a}$	$V_2(\eta) = \left(U + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \eta \right) \frac{l-\eta-a}{l-a}$	$V_2(y) = U - E_0 y = U \cdot \left(1 - \frac{y}{l-a} \right) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot (l-\eta-a) \frac{y}{l-a}$
Charge	$Q_c = -\omega_1 S = -C_a U - q \frac{\eta}{l-a}$	$q = \sigma S = (\omega_1 - \omega_2) S$	$Q_c = \omega_2 S = C_a U - q \frac{l-\eta-a}{l-a}$
Energy (on conductor)	$W_c = \frac{1}{2} Q_c \cdot 0 = 0$	$W_b = \frac{1}{2} q V_b = \left\{ \frac{1}{2} q U + \frac{q^2 \cdot \eta}{2\epsilon_0 \cdot S} \right\} \frac{l-\eta-a}{l-a}$	$W_a = \frac{1}{2} Q_a U = \frac{1}{2} C_a U^2 - \frac{1}{2} q U \frac{l-\eta-a}{l-a}$
Energy (total)	$W_P = W_c + W_b + W_a = \frac{1}{2} C_a U^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_a} \cdot \frac{\eta \cdot (l-\eta-a)}{(l-a)^2} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{S}{l-a} U^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta \cdot (l-\eta-a)}{(l-a) S} q^2$		

Notice : $C_a = \epsilon_0 S / (l-a)$

表4 一次元空間電荷系における電位, 電荷およびエネルギー
Table 4 Electric potential, charge and energy of space-charge layer between parallel plate electrodes.

Region	#1	#R	#2
Potential	$V_1(y) = E_0 \cdot (l-y) = U \left(1 - \frac{y}{l} \right) + \frac{(\rho a)}{\epsilon_0} \beta (l-y)$	$V_\rho(y) = V_1(\eta+a) + \int_\eta^y E_\rho(y) dy = V_2(\eta) - \int_\eta^y E_\rho(y) dy = U \left(1 - \frac{y}{l} \right) + (\rho/\epsilon_0) \{ \eta + a(1-\beta) \} y - \frac{\rho}{2\epsilon_0} (y^2 + \eta^2)$	$V_2(y) = U - E_0 y = U \left(1 - \frac{y}{l} \right) + \frac{\rho a}{\epsilon_0} (1-\beta) y$
Charge	$Q_c = -\omega_1 S = -CU - q\beta$	$\#dR : dq = (\rho dy) S$	$Q_a = \omega_2 S = CU - q(1-\beta)$
Energy (on conductor)	$W_c = \frac{1}{2} Q_c \cdot 0 = 0$	$W_\rho = \int_{y=\eta}^{\eta+a} \frac{1}{2} V_\rho dq = \frac{\rho S}{2} \int_\eta^{\eta+a} V_\rho(y) dy = \frac{1}{2} q U (1-\beta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \left\{ \frac{1}{3} \frac{a}{4l} + \left(\frac{\eta}{a} \right) \left(1 - \frac{a}{l} \right) - \frac{\eta^2}{a l} \right\} \left(\frac{a}{l} \right)$	$W_a = \frac{1}{2} Q_a U = \frac{C}{2} U^2 - \frac{1}{2} q U \cdot (1-\beta)$
Energy (total)	$W_P = W_c + W_\rho + W_a = \frac{1}{2} CU^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \left(\frac{a}{l} \right) \left\{ \frac{1}{3} \frac{a}{4l} + \left(\frac{\eta}{a} \right) \left(1 - \frac{a}{l} \right) - \frac{\eta^2}{a l} \right\}$		

Notice : $C = \epsilon_0 S / l$

この立場からのエネルギー表現が与えられている。

4.2 一次元系におけるポテンシャル・エネルギー増分

図2のような運動電荷を有する一次元系において、時間 dt ($t \sim t+dt$) 内に電荷が $d\eta$ ($\eta \sim \eta+d\eta$; $\eta+a \sim \eta+d\eta+a$) だけ変位をしたとする。この間の PE 増分は

$$dW_P = dW_t + dW_\eta \quad (10)$$

ここに

$$dW_t = \frac{\partial W_P}{\partial t} dt : \text{時間 } dt \text{ に電界が時間的に変化したための増分}^*$$

$$dW_\eta = \frac{\partial W_P}{\partial \eta} d\eta : \text{変位 } d\eta \text{ のため電荷位置が空間的に変化したゆえの増分}$$

運動電荷が図2(a), (b)によってこれらの表式は異なり、

$$dW_t = \begin{cases} C_a \frac{dU}{dt} \cdot dt & \text{(a): すなわち運動帯電導体板の場合,} \\ C_a = \epsilon_0 S / (l-a) \\ \bar{C} \frac{dU}{dt} \cdot dt & \text{(b): すなわち運動空間電荷層の場合,} \\ \bar{C} = \epsilon_0 S / l \end{cases}$$

$$dW_\eta = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_a} \left(1 - \frac{2\eta}{l-a}\right) \frac{d\eta}{l-a} : \text{図2(a)の場合} \\ \frac{1}{2} \frac{q^2}{\bar{C}} \left(1 - \frac{2\eta+a}{l}\right) \frac{d\eta}{l} : \text{図2(b)の場合} \end{cases}$$

5. 一次元運動電荷系の力および運動エネルギー

5.1 一次元運動電荷系の力

電界のなかにある導体の表面外向きの静電圧力 f (N/

m^2) は数値的には静電エネルギー密度 w (J/m³) に等しいことは静電気学における基礎的知識である。

当面の一次元系のうち図2(a)のような導体に作用する力は具体的かつ定量的な表現が可能である。すなわち導体Bの表面としては B_1 ($y=\eta+a$), B_2 ($y=\eta$) があり、その y 方向 (力の記号の \leftarrow , B_1 では外向き, B_2 では内向き) の力は、上記の $f \equiv w$ の関係を基として表5のように計算される。

他方、空間電荷層Rは全体としては導体として取り扱うことはできないが、図2(b)に示すような厚さ dy ($y \sim y+dy$), 等電位 $V(y)$ の微小等価帯電板導体の集合と見なして解析すればよい。すなわちこの微小等価導体板 dR に働く静電圧力 $df(y)$ は、 $y+dy$ 面の外向き (y 方向) の成分と y 面の内向き (y と逆方向) の成分との合成であるから、表6のように記述される。したがって dR に働く力 $dF(y)$, および全空間電荷層Rに作用する力 F が同表に記述のように得られる。

5.2 一次元運動電荷系の潜在力

上述の一次元系において電荷 q に作用する力 F は、次のような2成分に分けられる。

$$F_E = q\bar{E} : \text{印加静電界から受ける力}$$

$$F' : \text{その他の力。仮に潜在力 (latent force, potential force) とよんでおく}^*$$

後者については、電荷分布の種類によって次のようになる。

$$F' = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C_a} \left\{ \frac{2\eta}{l-a} - 1 \right\} \frac{1}{l-a}, q = \sigma S : \text{図2(a)の場合} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{\bar{C}} \left\{ \frac{2\eta+a}{l} - 1 \right\} \frac{1}{l}, q = (\rho a) S : \text{図2(b)の場合} \end{cases}$$

表5 一次元系における帯電導体 (厚さ a) に働く力

Table 5 Electrical force on the charged conductor (thickness, a) between parallel plate electrodes.

Region (side of the conductor)	#1-region (Left side of the conductor) $y = \eta + a$	#2-region (Right side of the conductor) $y = \eta$
Electrostatic pressure	$\overleftarrow{f}_1 = w_1$	$\overleftarrow{f}_2 = -\overrightarrow{f}_2 = -w_2$
Force (side)	$\overleftarrow{F}_1 = \overleftarrow{f}_1 S$ $= \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_0 E a^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\eta}{l-a} \right)^2 \right\} S + E a \sigma \cdot \left(\frac{\eta}{l-a} \right) S$	$\overleftarrow{F}_2 = -\overrightarrow{f}_2 S$ $= -\frac{1}{2} \left\{ \epsilon_0 E a^2 + \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \left(\frac{l-\eta-a}{l-a} \right)^2 \right\} S + E a \sigma \cdot \left(\frac{l-\eta-a}{l-a} \right) S$
Force (resultant)	$\overleftarrow{F} = \overleftarrow{F}_1 + \overleftarrow{F}_2 = \overleftarrow{F}_E + \overleftarrow{F}'$ $= E a \sigma S + \left(\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \right) \left\{ 2 \left(\frac{\eta}{l-a} \right) - 1 \right\} S = q E a + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C_a} \left\{ 2 \left(\frac{\eta}{l-a} \right) - 1 \right\} \frac{1}{l-a}$	

Notice : $F_E = E a \sigma S = q E a$

*3 電源電圧 U が時間的に変化することに起因する。直流電源の場合にはこの増分はゼロ。表1, 2 では直流電圧を想定。

*4 堀井¹⁰⁾のイメージ力 (image force) に相当する。

表6 一次元系における空間電荷層の微小厚さの素片 dR に働く力, $dF(y)$ ならびに層全体に働く力, F

Table 6 Electrical force, $dF(y)$ on an elementarily thin space-charge layer, dR and F on the whole spacecharge layer, R between parallel plate electrodes.

Electrostatic pressure on elementary layer, dR	$\overleftarrow{df}(y) = \overleftarrow{f}(y+dy) + \overrightarrow{f}(y) = \overleftarrow{f}(y+dy) - \overleftarrow{f}(y) = \omega\rho(y+dy) - \omega\rho(y) = -\frac{\partial\omega\rho}{\partial y} dy$ $= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \{ \overline{D} - (\rho a)(1-\beta+\eta/a) + \rho y \} dy$
Electrostatic force on elementary layer, dR	$\overleftarrow{dF}(y) = S \cdot \overleftarrow{df}(y)$ $= S \cdot \left[\rho \overline{E} + \frac{\rho^2}{\epsilon_0} \{ y - \eta - a(1-\beta) \} \right] dy$
Electrostatic force on space charge layer R	$\overleftarrow{F} = \int_{y=\eta}^{\eta+a} \overleftarrow{dF}(y) = q\overline{E} + S \frac{(\rho a)^2}{\epsilon_0} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) = q\overline{E} + \frac{q^2}{2C} \left\{ \frac{2\eta+a}{l} - 1 \right\} \frac{1}{l}$
Notice : $F_E = (S\rho\overline{E}) = q\overline{E}$	

表7 一次元運動帯電導体系における $d\eta$ -変位 (dt -時間) 間のエネルギー変化

Table 7 Variation of energy in $d\eta$ -displacement (during dt -time) for moving charged conductor between parallel plate electrodes.

PE-increase in $d\eta$ -displacement	$dW_P = \frac{\partial W_P}{\partial t} dt + \frac{\partial W_P}{\partial \eta} d\eta = dW_t + dW_\eta$ $= C_a U \frac{dU}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_a} \left\{ 1 - \frac{2\eta}{(l-a)} \right\} \frac{d\eta}{l-a} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_a^2 \right) \cdot dt \right.$ $\left. + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{l-a} - \frac{2\eta}{(l-a)^2} \right\} d\eta \right] (l-a) S$
KE-consumption in $d\eta$ -movement	$dW_K = \overleftarrow{F} d\eta$ $= qE_a d\eta + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_a} \left\{ \frac{2\eta}{l-a} - 1 \right\} \frac{d\eta}{l-a}$
Energy necessary for $d\eta$ -displacement of the conductor in time, dt	$dW_q = dW_P + dW_K = \left(C_a \frac{dU}{dt} \right) U dt + qE_a \cdot d\eta$ $= \left\{ C_a \frac{dU}{dt} + \frac{qv}{l-a} \right\} U dt$

表8 一次元運動空間電荷系における $d\eta$ -変位間 (dt -時間内) のエネルギー変化

Table 8 Variation of energy in $d\eta$ -displacement (during dt -time) for moving space-charge layer between parallel plate electrodes.

PE-increase in $d\eta$ -displacement	$dW_P = dW_t + dW_\eta = \frac{\partial W_P}{\partial t} dt + \frac{\partial W_P}{\partial \eta} d\eta$ $= \overline{C} U \frac{dU}{dt} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \left\{ 1 - \frac{a}{l} - \frac{2\eta}{l} \right\} \frac{d\eta}{l}$
KE-consumption in $d\eta$ -movement of dR	$d^2 W_K = \overleftarrow{dF}(y) \cdot d\eta$ $= \left[\rho \overline{E} - \frac{\rho^2}{\epsilon_0} \{ y - \eta - a(1-\beta) \} \right] S dy d\eta$
KE-consumption in $d\eta$ -movement of R	$dW_K = \int_{y=\eta}^{\eta+a} d^2 W_K = d\eta \int_{\eta}^{\eta+a} S \left[\rho \overline{E} - \frac{\rho^2}{\epsilon_0} \{ y - \eta - a(1-\beta) \} \right] dy = \overleftarrow{F} d\eta$ $= d\eta \left[\rho a S \overline{E} - \frac{(\rho a)^2}{\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{l} \right) - \frac{\eta}{l} \right\} S \right] = \left[q\overline{E} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \left\{ 1 - \frac{2\eta+a}{l} \right\} \frac{1}{l} \right] d\eta$
Energy necessary for $d\eta$ -displacement of the volume charge, R in time, dt	$dW_q = dW_P + dW_K$ $= \overline{C} U \frac{dU}{dt} dt + q\overline{E} d\eta = \left\{ \overline{C} \frac{dU}{dt} + \frac{qv}{l} \right\} U dt$

5.3 一次元運動電荷系の運動エネルギー

一次元系において電荷 q に $d\eta$ なる変位を生ぜしめるための仕事 (work done) すなわち運動エネルギー (kinetic energy, KE と略記) 消費分,

$$dW_K = Fd\eta \quad (11)$$

が, それぞれ図 2 (a) および (b) に対し表 7 および 8 に明記されている。

力 F が印加電界力 F_E と潜在力 F' との 2 成分から成っているのに対応して上記の KE 消費分, dW_K もまた次のように 2 成分から成るものと解釈される。

$$dW_K = dW_E + dW' \quad (12)$$

ここに

$$dW_E = F_E d\eta = \begin{cases} \frac{qU}{l-a} d\eta : \text{図 2 (a) の場合} \\ \frac{qU}{l} d\eta : \text{図 2 (b) の場合} \end{cases}$$

$$dW' = F' d\eta = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C_a} \left(\frac{2\eta}{l-a} - 1 \right) \frac{d\eta}{l-a} : \text{図 2 (a) の場合} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} \left(\frac{2\eta+a}{l} - 1 \right) \frac{d\eta}{l} : \text{図 2 (b) の場合} \end{cases}$$

潜在力 F' による KE 消費分 dW' を簡単に潜在的運動エネルギー (latent kinetic energy, IKE と略記) 消費分とよぶことにしよう。

6. 一次元運動電荷系におけるエネルギーバランス

6.1 一次元運動電荷系に対する E・S 流のエネルギーバランス原理の適用

本文第 2 ~ 5 章で対象としてきた図 2 のような一次元運動電荷系に E・S 流の解法を適用してみよう。第 1 章の式 (2a), (2b) および (2) に対応して

$$dW_U = UI dt \quad (2a')$$

$$dW_K = q\bar{E}v dt \quad (2b')$$

$$UI dt = q\bar{E}v dt \quad (2')$$

これより

$$I = q(\bar{E}/U)v \quad (1'')$$

この式において

$$\frac{\bar{E}}{U} = \begin{cases} 1/(l-a) : \text{図 2 (a) 運動帯電導体板の場合} & (1a') \\ 1/l : \text{図 2 (b) 運動空間電荷層の場合} & (1b') \end{cases}$$

である。上の 2 式 (1a'), (1b') を式 (1'') に代入した結果は付表 2 に記載の電流式と一致している。後者は電界を基礎においた解析結果であって正確な結論である。それゆえ E・S 流の解法は正しい結果を導くものといえることができる。

6.2 一次元運動電荷系における PE 増分と IKE 消費分の比較

第 4.2 節で求めた時間 dt , 変位 $d\eta$ に伴う PE 増分,

$dW_P = dW_t + dW_\eta$ と第 5.3 節で導いた変位 $d\eta$ のための KE 消費分, $dW_K = dW_E + dW'$ とを比較してみると, 次のことがわかる。

$$dW_\eta + dW' = 0 \quad (13)$$

したがって

$$dW_P + dW_K = dW_t + dW_E \quad (14)$$

この 2 式は運動電荷が図 2 (a) のような導体面上の帯電に対して, 図 2 (b) のような空間体分布の電荷に対しても成立する。

6.3 一次元運動電荷系に対し PE 増分と KE 消費分を採り入れたエネルギーバランス原理の適用

図 2 のような一次元運動電荷系に対し, B・E の提唱したような PE 増分ならびに KE 消費分 (IKE を含む真の KE) を採り入れたエネルギーバランス原理を適用すれば, 次式が成立する。

$$dW_U = dW_P + dW_K \quad (15)$$

or

$$dW_U = dW_t + dW_E \quad (16)$$

前式 (15) は前節の式 (14) の助けによって後式 (16) に帰することは明らかである。具体的な表現に戻せば

$$UI dt = \begin{cases} C_a \frac{dU}{dt} \cdot U dt + \frac{qv}{l-a} \cdot U dt : \text{図 2 (a) の場合} & (17) \\ \bar{C} \frac{dU}{dt} \cdot U dt + \frac{qv}{l} \cdot U dt : \text{図 2 (b) の場合} \end{cases}$$

ただちに

$$I = \begin{cases} C_a \frac{dU}{dt} + \frac{qv}{l-a} : \text{図 2 (a) の場合} & (18) \\ \bar{C} \frac{dU}{dt} + \frac{qv}{l} : \text{図 2 (b) の場合} \end{cases}$$

最後の電流式 (18) の右辺第 1 項は電極間ギャップの形成するキャパシタンスに対する容量電流 (普通に充電電流と呼びならしている) を, 第 2 項が運動電荷電流 (電荷の運動による誘導電流) を示している。E・S の解法においては暗々裡に直流電源を想定していたので第 1 項は現われなかった。

7. あとがき

平行板電極間に帯電導体板もしくは空間電荷層が極板と平行に存在する一次元電荷系を対象とし解析を行なった結果, 次の諸項目を明らかにすることができた。

1) まず両電極間の各領域の電界 E (または電束密度 D) を導出。ついで電界エネルギー密度 w , 各域が保有する電界エネルギー W を求めた (表 1, 表 2 参照)。

2) 次に電荷が板面に垂直に陽極 A から陰極 C に向けて, すなわち印加電界方向 (y 方向) に所定の速度 v で運動する場合の電流密度 J を, 変位電流密度 J_D , 伝導

電流 (帯電導体) 密度 J_K もしくは対流電流 (空間電荷層) 密度 J_C の形で求め、当然のことながら電流の連続性が保たれていることを確認した (表1, 表2 (なお電流の大きさ I については付表2) 参照)。

3) 前項で得られた電流式 I は静電気学の基礎に忠実に導かれたものであるから、その正確さを疑う余地はない。一方、Engel・Steenbeck 流¹⁾のエネルギーバランス原理から求められた電流 I の表式も、この厳密解の I と同一形となった (6.1 節参照)。

4) この E・S の手法に対し、Brignell・Evison⁹⁾ はポテンシャルエネルギー (PE) を無視した誤りの方法であると主張し、PE を導入したと称する解法^{*5} を提示した。このような B・E の解が実は静電気学の基礎をもわきまえない誤りであることが明らかになった (付4 参照)。

5) 「PE を考慮に入れない E・S の方法がなにゆえに正しい解をもたらすのか？」この疑問に答えるのが本報告の主目標である。そのために B・E の取り扱った系をやや一般化した図2のような系を対象とし、電荷に作用する力 F およびそれにより微小変位 $d\eta$ が生じた場合の運動エネルギー (KE) dW_K 、さらにその間の PE 増分 dW_P を求めてみた (表3 ~ 8 参照)。

6) 前項に掲げた諸量の関係から、PE 増分 dW_P のうち電荷の $d\eta$ -変位による寄与 dW_η と潜在力 F' による KE の成分 dW' とが相殺し、結局 PE を考えに入れない E・S の解法 (直流電源の場合) そのままで、正しい電流 I の表式がもたらされることが明らかになった。

なお本研究のような電極間の荷電粒子の運動に関する問題を速度の異なる複数の荷電粒子群にまで拡張することについても現在考察中である。それによって重ねの理が成立するか否かの重要な問題点が理論的に立証されるという基礎的貢献がなされることになる。また他方において電気集塵機内のイオンおよび帯電ダストという速度の異なる粒子群の運動とも関連をもつという応用面への寄与も期待されるように思われる。

参 考 文 献

- 1) A.v. Engel and M. Steenbeck: *Elektrische Gasentladungen, Ihre Physik und Technik*, Bd. I (Grundgesetze), SS 1-5, 144-150, Julius Springer, Berlin (1932)
- 2) A.v. Engel: *Ionized Gases*, pp. 22-26, Oxford Univ. Press, London (1965)
- 3) J.D. Cobine: *Gaseous Conductors, Theory and Engineering Applications*, pp. 55-58, Dover Publication, New York (1958)
- 4) L. Adamczewski: *Ionization, Conductivity and Breakdown in Dielectric Liquids*, pp. 196-197,

Taylor and Francis, London (1969)

- 5) たとえば、西巻正郎: 電磁気学, pp. 88-89, 培風館, 東京 (1974); 武者利光: 電気磁気学, p. 121, 朝倉書店, 東京 (1973)
- 6) たとえば、大重 力, 原 雅則: 高電圧現象, pp. 30-31, 森北出版, 東京 (1973); 犬石嘉雄, 中島達二, 川辺和夫, 家田正之: 誘電体現象論, p. 247, 電気学会, 東京 (1973)
- 7) W. Shockley: *J. Appl. Phys.*, 9 (1938) 635
- 8) S. Ramo: *Proc. IRE*, 27 (1939) 584
- 9) J.E. Brignell and J. Evison: *J. Phys. D Appl. Phys.*, 6 (1973) 59
- 10) 堀井憲爾: 昭51電学全大予稿, No. 102 (1976)

付 1 平行平板電極間の体分布真電荷誘電体の運動による電流

本文図2 (b) の体分布空間電荷部分 #R は真空 (または近似的には気体, 誘電率 ϵ_0) であったが、本節ではその部分 #R' が誘電率 $\epsilon = \epsilon^* \epsilon_0$ (ϵ^* は比誘電率) の誘電体である場合の解析を進める。

一次元系に対するガウスの定理 (Gauss' theorem) から #R' では、電束密度 D' (一次元系であるから y 成分のみであり、 D'_y と記す) について次式が成り立つ。

$$\text{div } D' \equiv \frac{dD'_y}{dy} = \rho \quad (\text{A. 1})$$

$$\therefore D'_y = \rho y + K' \quad (\text{A. 2})$$

#1, #2 内には体分布電荷はないから、

$$D_1 = \text{const.} \quad D_2 = \text{const.} \quad (\text{A. 3})^{*6}$$

また #1, #R' の境界 $y = \eta + a$ および #R', #2 の境界 $y = \eta$ には面分布真電荷は存在しないから電束密度は連続である。ゆえに式 (A. 2), (A. 3) によって

$$D_1 = \rho \cdot (\eta + a) + K', \quad D_2 = \rho \eta + K' \quad (\text{A. 4})^{*7}$$

電極間の電位差 U は与えられているから次式が用意される。

$$\frac{D_1}{\epsilon_0} (l - \eta - a) + \int_{\eta}^{\eta+a} \frac{D'_y}{\epsilon} dy + \frac{D_2}{\epsilon_0} \eta = U \quad (\text{A. 5})$$

この式より未知量 K' が付表1に付記してあるように決定される。 K' が定まると、式 (A. 2), (A. 4) より D'_y , D_1 , D_2 が定まり、これに応じて $J_{D'}$, J_{D_1} , J_{D_2} が求められ、順次、付表1の諸量が求められる。

付 2 3 種の運動電荷電流の比較

付表2は本文第3章に記述した平行平板電極間の真空

*6 #R' (誘電体) の場合と本文の #R (真空) の場合とでは #1, #2 の電束密度も異なるので、本来ならば D'_1 , D'_2 のように肩符をつけるべきであるが、便宜上略している。

*7 もちろん、電界のほうは $E_1 = D_1/\epsilon_0$, $E'_y = D'_y/\epsilon$, $E_2 = D_2/\epsilon_0$ のように不連続となる。これはいうまでもなく、境界に生ずる面分布極電荷による。

*5 この報告こそ本研究の端緒となったものである。

付表1 平行平板電極間の体分布真電荷をもつ誘導体による電界および電流

Table A1 Current due to moving dielectrics with true volume charge between parallel plate electrodes.

Quantity	Region		
	#1 [$l \geq y \geq \eta + a$]	#R' [$\eta + a \geq y \geq \eta$]	#1 [$\eta \geq y \geq 0$]
Volume charge density	0	ρ	0
Electric flux density	$D_1 = \rho \cdot (\eta + a) + K'$	$D_{\rho'} = \rho y + K'$	$D_2 = \rho \eta + K'$
Electric field intensity	$E_1 = D_1 / \epsilon_0$ $= \frac{\rho}{\epsilon_0} (\eta + a) + \frac{K'}{\epsilon_0}$	$E_{\rho'} = D_{\rho'} / \epsilon$ $= -\frac{\rho}{\epsilon} y + \frac{K'}{\epsilon}$	$E_2 = D_2 / \epsilon_0$ $= \frac{\rho}{\epsilon_0} \eta + \frac{K'}{\epsilon_0}$
Displacement current density	$J_{D1} = \frac{dD_1}{d\eta} \cdot v$ $= \rho v \left(\frac{a}{l'} \right)$	$J_{D\rho'} = \frac{dD_{\rho'}}{d\eta} \cdot v$ $= -\rho v \left(1 - \frac{a}{l'} \right)$	$J_{D2} = \frac{dD_2}{d\eta} \cdot v$ $= \rho v \left(\frac{a}{l'} \right)$
Convection current density	$J_{C1} = 0$	ρv	$J_{C2} = 0$
Total current density	$J = J_D + J_C = \rho v \frac{a}{l'}$		
Total current	$I = qv / l'$		

Notice: $l' = l - a'$, $a' = a \left(1 - \frac{1}{\epsilon^*} \right)$, $\frac{1}{\epsilon^*} = -\frac{\epsilon_0}{\epsilon}$

$$K' = \epsilon_0 \frac{U}{l'} - \rho \left[\eta \left(1 - \frac{a}{l'} \right) + a \left\{ 1 - \left(\frac{a}{2l'\epsilon^*} \right) \right\} \right]$$

$$\frac{dK'}{d\eta} = -\rho \left(1 - \frac{a}{l'} \right)$$

付表2 平行平板電極間を運動する(真空内および誘電体内)体分布電荷層および帯電導体板による3種の電流

Table A2 Currents of 3 kinds due to volume charge layer (in vacuum and in dielectrics) and charged plate conductor moving in parallel plate electrodes.

Kind of moving charge	Volume charge in space			Volume charge of dielectrics			Surface charge on conductor		
	#1	#R	#2	#1	#R'	#2	#1	#B	#2
Displacement current density	$(\rho v) \frac{a}{l}$	$(\rho v) \left\{ \frac{a}{l} - 1 \right\}$	$(\rho v) \frac{a}{l}$	$(\rho v) \frac{a}{l'}$	$(\rho v) \left\{ \frac{a}{l'} - 1 \right\}$	$(\rho v) \frac{a}{l'}$	$\frac{\sigma v}{l-a}$	0	$\frac{\sigma v}{l-a}$
Convection current density	0	ρv	0	0	ρv	0	0		
Conduction current density	0			0			0	$J_K = \lim \epsilon E_b$ $= \frac{\sigma v}{l-a}$	0
Total current density	$J = \frac{(\rho a)v}{l}$			$J = \frac{(\rho a)v}{l'}$			$J = \frac{\sigma v}{l-a}$		
Total current	$I = \frac{qv}{l}$			$I = \frac{qv}{l'}$			$I = \frac{qv}{l-a}$		
Equivalent electrode distance	l			l'			$l-a$		

中(近似的には気体中)の運動帯電導体板, 運動空間電荷層および付1に記した運動誘電体真電荷層の3種による電流表式を比較整理したものである。電流はすべて $I = qv/L$ の形式で表わされる。Lはいわば等価電極間距離

ともいうべきもので, それぞれ $l-a$, l および $l' = l - a(1 - \epsilon_0/\epsilon)$ となる。

付表3 平行平板電極間の運動平面電荷による電流

Table A3 Electric current due to moving plane charge between parallel plate electrodes.

Region	#1 (between C and Y)	#Y (on Y)	#2 (between Y and A)
Range	$l \geq y > \eta$	$y = \eta$	$\eta > y \geq 0$
Field intensity	$E_1 = \bar{E} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{\eta}{l}$	discontinuous	$E_2 = \bar{E} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)$
Potential	$V_1(y) = E_1(l - y)$	$V_2 = V_1(\eta) = V_2(\eta)$ $U \cdot \left(1 - \frac{\eta}{l}\right) + \frac{q}{C} \left(\frac{\eta}{l}\right) \cdot \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)$	$V_2(y) = U - E_2 y$
Current density	$J = \frac{\sigma v}{l}$		
Current	$I = JS = \frac{qv}{l}$		

付3 平行平板電極間の運動平面電荷による電流

付表2の3種の運動電荷に対し、全電荷 q を一定に保ち厚さ a をゼロ (したがって、空間電荷の場合、体密度 ρ を無限大) にした極限は、平表面密度 $\sigma (=q/S)$ の運動平面電荷に帰す。その場合の電界、電位および電流は、本文の表1~4および付表1, 2の特別の場合として容易に求められる。その結果が付表3である。

B・E⁹⁾ は、このような最も簡単な次元運動電荷系を研究対象としている。

付4 Brignell and Evison の解法^{*8}

B・E がエネルギーバランス式として提示しているのは

^{*8} B・E は他の発表論文から推察するに液体絶縁物の研究者である。そのためか運動電荷電流に関連して (少なくとも B・E のいるイギリスにあっては)、最優先して参考すべき文献2) でなく、文献4) を引用している。もちろん元の文献1) は引用していない。

次式である (記号は本報告のものに直してある)。

$$UI dt = \underbrace{qE(\eta) d\eta}_{\text{work done by } q} + \underbrace{(-qE(\eta) d\eta)}_{\text{PE lost by } q} + \underbrace{Uq d\eta/l}_{\text{PE gained by bound charge}} \quad (\text{A.6})$$

この式の中には次のような根本的な誤りがある。

i) 電気一重層 (single layer) のところ $y = \eta$ では電界は下連続であって、その場所の電界 $E(\eta)$ は定義することはできない。その $E(\eta)$ を考えている。

ii) B・E のエネルギーバランス式 (A.6) において左辺は電源から dt 間に供給されるエネルギーであるから、右辺の PF は増分をとるべきであるのに符号を変えて減分をとっている。しかも PE を媒質中の分 (第2項) と導体上の分 (第3項) と双方を重複してとり入れている。偶然に第1項と逆符号の第2項とのため曖昧な $E(\eta)$ が消去され、電流 I としては正しい表式 (付表3) がもたらされることになる。