

論 文

自由空間中の運動電荷による界およびエネルギー

三好和憲*, 水野積成**, 関谷昌久***, 三好保憲****
(1986年12月20日受理)

Field and Energy due to a Moving Charge in Free Space

K. MIYOSHI,* M. MIZUNO,** Y. SEKIYA*** and Y. MIYOSHI****

(Received December 20, 1986)

This report is a continuation of the previous paper. Being based on the analysis of electric field and electric current, a phenomenological study on magnetic field, electrostatic and electromagnetic energies and energy flow (Poynting vector) due to motion of spherical shape (spherical volume, spherical-shell volume and spherical surface) charge has been carried out. Taking the spherical surface or spherical volume charge as a model of electron, electron mass and classical electron radius are also analytically derived, and the values obtained in such a way are compared with those mentioned in many books. The content of this paper is as follows: 1. Introduction, 2. Fields, 3. Energy densities, 4. Energies, 5. Energy flow (Poynting vector), 6. Comparison of electrostatic energy with electromagnetic energy, 7. Derivation of electromagnetic mass of electron based on the above-mentioned analytical method, 8. Conclusion.

1. まえがき

前報¹⁾では、自由空間中を運動している回転対称分布空間電荷（体分布の球、球殻および回転楕円体電荷および面分布の球面電荷、さらにこれらの極限としての点電

* 筑波大学電子情報工学系 (305 茨城県新治郡桜村)

現在：工学院大学 (160 東京都新宿区西新宿)

Department of Electronics and Information Science, University of Tsukuba, Sakura-mura, Niihari-gun, Ibaraki, 305 Japan

Present address : Kogakuin University, Nishi-Shinjuku, Shinjuku-ku, Tokyo, 160 Japan

** 名古屋大学工学部原子核工学科 (464 名古屋市千種区不老町)

現在：名古屋女子商科短期大学 (488 尾張旭市新居町)

Department of Nuclear Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464 Japan

Present address : Nagoya Women's Junior College of Commerce, Arai-cho, Owariasahi, 488 Japan

*** 大同工業大学電気工学科 (457 名古屋市南区大同町)

Department of Electrical Engineering, Daido Institute of Technology, Daido-cho, Minami-ku, Nagoya, 457 Japan

**** 名古屋工業大学名誉教授 (466 名古屋市昭和区御器所町)

Professor Emeritus, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya, 466 Japan

荷)による電流の解析的研究について述べた。本報はいわばその続報であって、まず球体、球殻の両体分布電荷ならびに後者の極限としての球面電荷の運動による磁界を求めており、また、静電、電磁の両種のエネルギー密度、さらには各範囲（球体については球の内外、球殻については球殻実体と球殻外、さらに球面については、球面それ自体と球外）に保有されるエネルギーの表式を導いた。なお電界、磁界に伴うエネルギーの流れすなわち Poynting ベクトルの様相をも明らかにした。

さらに球面および球体電荷を電子のモデルとして採り電子の静止質量および電磁質量を導いた。なお、この質量から電子の古典的半径を求め、諸家の値と比較対照した。なお古典的立場に立つ限界については、文献 2) を参考とした。

2. 界

2.1 電 界

平等密度の球状電荷（総電気量は q 、球体および球殻においては均一体積密度 ρ 、球面においては均一面積密度 σ ）による電界は、球の内外において半径方向であり、大いさ E に対する表式は前報¹⁾の表 1～3 に示したとおりである。図 1 は球殻電荷について画かれたものである。

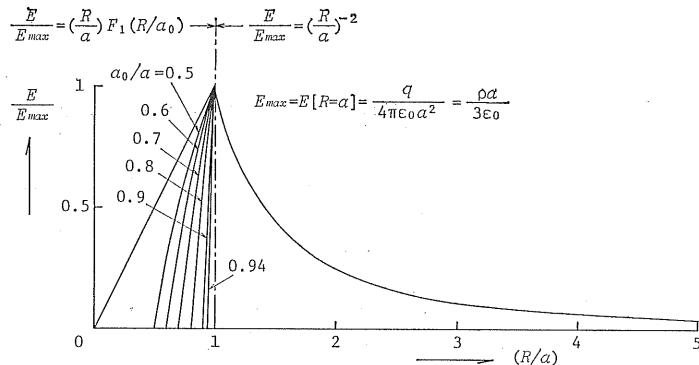


図 1 電界強度対半径方向距離 (球殼電荷)

Fig. 1 Electric field intensity vs radial distance (Spherical shell charge)
 $F_1(R/a_0) = g(R/a_0)/g(a/a_0)$.

2.2 磁界

図 2 は考察円 $S\{s, z\}$ を通る電流 $I\{s, z\}$ と、それに
よって生ずる磁界 H との関係を示す。 H は S そのもの
に沿うて生じ、向きは図示するとおりである。大きさは

$$\oint H ds = I, \quad H \cdot 2\pi s = I \quad (1)$$

から

$$H = I/2\pi s \quad (\text{A/m}) \quad (2)$$

前報¹⁾の表 1, 2 には球体および球殼の運動電荷、また
表 3 には球面の運動電荷による電流が与えられているから、
それに対応する磁界 H は上式から導かれ、表 1, 2
に記入されている。

いまでもなく、電界 E は R だけの関数であったが、
磁界 H は (s, z) あるいは (R, θ) の関数である。図 3
には θ をパラメータとし R を変数とした場合の関数 H が
画かれている。

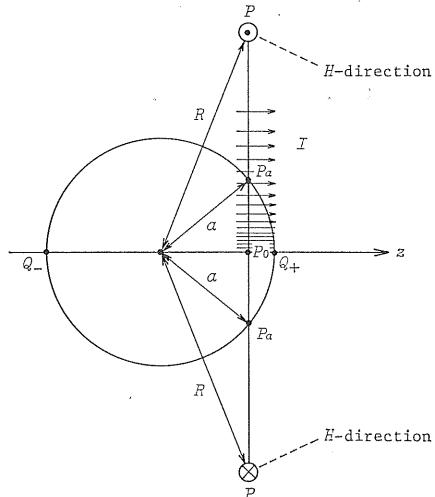
図 2 考察円 $S\{s, z\}$ を通る電流 I ならびに磁界 H

Fig. 2 Electric current I , through the "Aufkreis"
 $S\{s, z\}$ and magnetic field H .

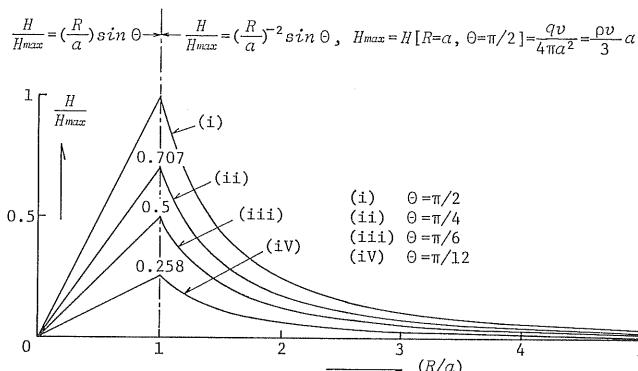


図 3 磁界強度対半径方向距離および方向角 (球体電荷)

Fig. 3 Magnetic field intensity vs radial distance and directional angle
(Spherical volume charge).

表1 運動球状(球体および球殻)電場による界、エネルギーおよびエネルギーの流れ
Table 1 Field, energy and energy flow due to moving spherical shape (spherical volume and spherical-shell volume) charge.

Quantity	Region	
	Outside sphere, $R > a$	Inside spherical volume, $R < a$
$E(V/m)$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2}$	$\frac{\rho}{3\varepsilon_0} R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{a^2} \left(\frac{R}{a}\right)$ $\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot R \cdot g(R/a_0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \left(\frac{R}{a}\right) \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)}$
$w_e(J/m^2)$	$\frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R^4}$	$\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0} R^2 = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^4} \left(\frac{R}{a}\right)^2$ $\frac{\rho^2}{18\varepsilon_0} R^2 \cdot g(R/a_0)^2 = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^4} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \left\{ \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)} \right\}^2$
$W_e(J)$	$W_{eE} : \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a}$	$W_{eI} : \frac{4\pi}{90\varepsilon_0} \rho^2 a^5 = \frac{1}{40\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a}$ $W_{eS} = \frac{4\pi}{90\varepsilon_0} \rho^2 a^5 G(a/a_0) = \frac{1}{40\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} \cdot \frac{G(a/a_0)}{\{g(a/a_0)\}^2}$
$W_E(J)$		$W_{eE} + W_{eI} : \left(-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} \right) \left[1 + \frac{1}{5} \right]$ $W_{eE} + W_{eS} : \left(\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} \right) \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{G(a/a_0)}{\{g(a/a_0)\}^2} \right]$
$H(A/m)$		$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{qv}{R^2} \left(\frac{s}{R}\right) = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{R^2}$ $\frac{qv}{3} s = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{qv}{a^2} \right) \left(\frac{R}{a} \sin\theta \right)$ $\frac{qv}{3} s \cdot g(R/a_0) = \frac{qv}{4\pi a^2} \left(\frac{R}{a} \sin\theta \right) \cdot \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)}$
$w_m(J/m^3)$		$\frac{\mu_0}{32\pi^2} \left(\frac{qv}{R^2} \right)^2 \left(\frac{s}{R} \right)^2 = \frac{\mu_0}{32\pi^2} \left(\frac{qv}{a^2} \right)^2 \left(\frac{R}{a} \right)^2 \sin^2\theta$ $\frac{\mu_0}{18} (\rho v)^2 s^2 = \frac{\mu_0}{36\pi^2} \left(\frac{qv}{a^2} \right)^2 \sin^2\theta$ $\frac{\mu_0}{18} (\rho v)^2 s^2 \{g(R/a_0)\}^2 = \frac{\mu_0}{32\pi^2} \left(\frac{qv}{a^2} \right)^2 \left(\frac{R}{a} \sin\theta \right)^2 \left\{ \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)} \right\}^2$
$W_m(J)$	$W_{mE} : \frac{\mu_0}{12\pi} \cdot \frac{(qv)^2}{a}$	$W_{mI} : \frac{4\pi\mu_0}{5 \times 27} (\rho v)^2 a^5 = \frac{\mu_0}{5 \times 12\pi} \frac{(qv)^2}{a}$ $W_{mS} = \frac{4\pi\mu_0}{135} (\rho v)^2 a^5 \cdot G(a/a_0) = \frac{\mu_0}{5 \times 12\pi} \cdot \frac{(qv)^2}{a} \cdot \frac{G(a/a_0)}{\{g(a/a_0)\}^2}$
$W_M(J)$		$W_{mE} + W_{mI} : \left\{ \frac{\mu_0}{12\pi} \cdot \frac{(qv)^2}{a} \right\} \left[1 + \frac{1}{5} \right]$ $W_{mE} + W_{mS} : \left\{ \frac{\mu_0}{12\pi} \cdot \frac{(qv)^2}{a} \right\} \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{G(a/a_0)}{\{g(a/a_0)\}^2} \right]$
$S(W/m^2)$	$\frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R^4} v \cdot \sin\theta$	$\frac{1}{9\varepsilon_0} \rho^2 R^2 v \sin\theta = \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2 R^2}{a^6} v \sin\theta$ $\frac{1}{9\varepsilon_0} \rho^2 R^2 v \sin\theta \cdot \{g(R/a_0)\}^2 = \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2 R^2}{a^6} v \sin\theta \cdot \left\{ \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)} \right\}^2$
Notice : $u=R/a_0$, $a=a/a_0$, $q(u)=1-u^{-3}=1-(a_0/R)^3$	$G(a)=1-5a^{-3}+9a^{-5}-5a^{-6}=(1-\alpha^{-1})^3(1+3\alpha^{-1}+6\alpha^{-2}+5\alpha^{-3})=\left(1-\frac{a_0}{a}\right)^3+\left(1+\frac{3-a_0}{a}\right)^3+6\left(\frac{a_0}{a}\right)^2+5\left(\frac{a_0}{a}\right)^3$	

表2 運動球面電荷による界、エネルギーおよびエネルギーの流れ

Table 2 Field, energy and energy flow due to moving spherical surface charge.

Quantity	Region	
	On spherical surface, $R=a_0$	Outside spherical surface, $R>a_0$
$E(V/m)$	$0, R \rightarrow a_0$ $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}, R \rightarrow a$	
$w_e(J/m^3)$	$0, R \rightarrow a_0$ $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 a^4}, R \rightarrow a$	
$W_e(J)$	$W_{eo} : 0$	
$W_E(J)$	$W_{eE} + W_{eo} : \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a}$	
$H(A/m)$	$0, R \rightarrow a_0$ $\sigma v \sin\theta = \frac{qv}{4\pi a^2} \sin\theta, R \rightarrow a$	All the expressions for the corresponding quantities are the same expressions as those in Table 1.
$w_m(J/m^3)$	$0, R \rightarrow a_0$ $\frac{1}{2}(\sigma v)^2 \sin^2\theta = \frac{(qv)^2}{32\pi a^4} \sin^2\theta, R \rightarrow a$	
$W_m(J)$	$W_{mo} : 0$	
$W_M(J)$	$W_{mE} + W_{mo} : -\frac{\mu_0}{12\pi} \cdot \frac{(qv)^2}{a}$	
$S(W/m^2)$	$0, R \rightarrow a_0$ $\frac{\sigma^2 v}{\epsilon_0} \sin\theta = \frac{q^2 v}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \sin\theta, R \rightarrow a$	
$T(W/m)**$	0	

Notice : * Dealing with as the limit of spherical-shell volume charge,
 $R \rightarrow a_0$: the limit of the inner surface of spherical-shell volume or the surface of shell hole.

$R \rightarrow a$: the limit of the outer surface of spherical-shell volume.

** $T = \lim_{a_0 \rightarrow a} (S \cdot (a - a_0))$ could be called "surface Poynting vector."

3. エネルギー密度

3.1 電界エネルギー密度

電界 E の存在する場所の電界エネルギー(静電エネルギー)

密度は次式で与えられる。

$$w_e = (1/2) \epsilon_0 E^2 \quad (J/m^3) \quad (3)$$

電界 E が R だけの関数であるから、それによる静電エネルギー密度 w_e もまた R だけの関数となる。表1, 2にはそれぞれ球体および球殻、球面に対する w_e の表式が整理されている。

3.2 磁界エネルギー密度

磁界 H が存在する場所の磁界エネルギー(電磁エネルギー)密度は次式で与えられる。

$$w_m = (1/2) \mu_0 H^2 \quad (J/m^3) \quad (4)$$

磁界 H が (R, θ) の関数であるから、それによる電磁エネルギー密度 w_m もまた (R, θ) の関数となる。表1, 2にはそれぞれ球体および球殻、球面に対する w_m の表式が整理されている。

磁界エネルギー密度対電界エネルギー密度比 (w_m/w_e) 特性が図4, 5に画かれている。前者は θ をパラメータとし (v/c) を変数としたもの、また後者は θ を変数としたものである。

4. エネルギー

4.1 電界エネルギー

球状電荷の形と領域とによって E 、したがって w_e の表式が異なるために、各領域ごとに電界エネルギー(静電エネルギー) W_e の表式を求める必要がある。すなわち

$$(a) \text{ 球外: } W_{eE} = \int_{R=a}^{\infty} w_e \cdot 4\pi R^2 \cdot dR \quad (5a)$$

$$(b) \text{ 球体内: } W_{eI} = \int_{R=0}^a w_e \cdot 4\pi R^2 \cdot dR \quad (5b)$$

$$(c) \text{ 球殼体内: } W_{eS} = \int_{R=a_0}^a w_e \cdot 4\pi R^2 \cdot dR \quad (5c)$$

したがって全電界エネルギー W_E は、球体および球殼について、それぞれ次のようになる。

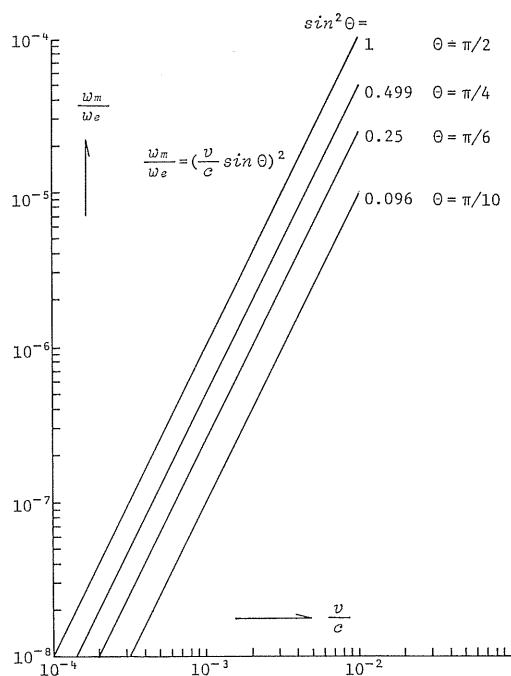


図 4 磁界エネルギー密度対電界エネルギー密度比と運動電荷速度 (球殻電荷)

Fig. 4 Relation between magnetic energy density to electric energy density ratio and velocity of moving charge (Spherical shell charge).

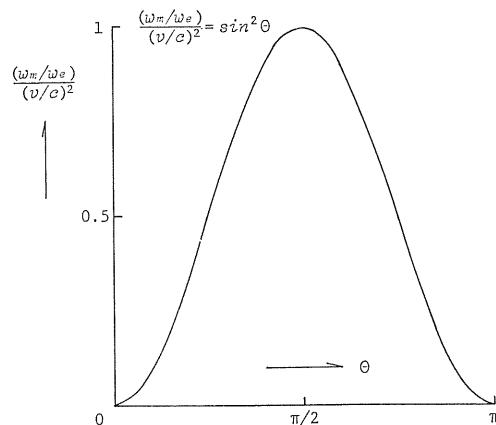


図 5 磁界エネルギー密度対電界エネルギー密度比と電荷の運動方向角 (球殻電荷)

Fig. 5 Relation between magnetic energy density to electric energy density ratio and directional angle of moving charge (Spherical shell charge).

$$W_E = W_{eE} + \begin{cases} W_{mI} & : \text{球体} \\ W_{mS} & : \text{球殻} \end{cases} \quad (6)$$

これらエネルギーの各計算式が表 1 に整理されている。

球面については球殼の極限として考えればよい。

$$W_E = W_{eE} + W_{eO} = W_{eE} \quad (6')$$

4.2 磁界エネルギー

運動球状電荷の形と領域とによって H , したがって w_m の表式が異なるため磁界エネルギー (電磁エネルギー) W_m の表式も、電界エネルギーの場合のように、各領域ごとに求められるべきである。すなわち

(a) 球外 :

$$W_{mE} = \int_{R=a}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} w_m \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot dR \quad (7a)$$

(b) 球体内 :

$$W_{mI} = \int_{R=0}^{a_0} \int_{\theta=0}^{\pi} w_m \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot dR \quad (7b)$$

(c) 球殼体内 :

$$W_{mS} = \int_{R=a_0}^{a} \int_{\theta=0}^{\pi} w_m \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot dR \quad (7c)$$

したがって全磁界エネルギー W_M もまた全電界エネルギーのように、球体および球殼についてそれぞれ次のようにして求められる。

$$W_M = W_{mE} + \begin{cases} W_{mI} & : \text{球体} \\ W_{mS} & : \text{球殼} \end{cases} \quad (8)$$

これらエネルギーの各計算式が表 1 に与えられている。

球面電荷については、電界エネルギーの場合と同じように、球殼電荷の極限として考えればよい。

$$W_M = W_{mE} + W_{eO} = W_{mE} \quad (8')$$

図 6 には全磁界エネルギーと全電界エネルギーの比が v/c の関数として画かれている。

5. エネルギーの流れ

運動電荷による電界および磁界に伴うエネルギーの流れいわゆるポインティング・ベクトル (Poynting vector) は次式で定義される。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{W/m}^2) \quad (9)$$

この定義にしたがって球体、球殼体の両運動電荷について \mathbf{S} の値が表 1 に整理されている。図 7 は球体電荷の球外、球内の \mathbf{E} 、 \mathbf{H} および \mathbf{S} 、3 者の方向を示したものである。これらベクトル 3 者の方向は球体の外、内においても同様である。また球殼体 ($a_0 < R < a$) 領域においても同様である。図 8 には Poynting ベクトル \mathbf{S} の半径方向距離 R への依存性が、また図 9 には \mathbf{S} の方向角 θ への依存性が画かれている。後者はまた磁界対電界比 (H/E) が相似な依存性をもつことが明示されている。

6. エネルギーの比較

6.1 両種のエネルギー密度の比較

表 1 から、運動球体および球殼体電荷に対しては磁界エネルギー密度と電界エネルギー密度の比 w_m/w_e は球外、

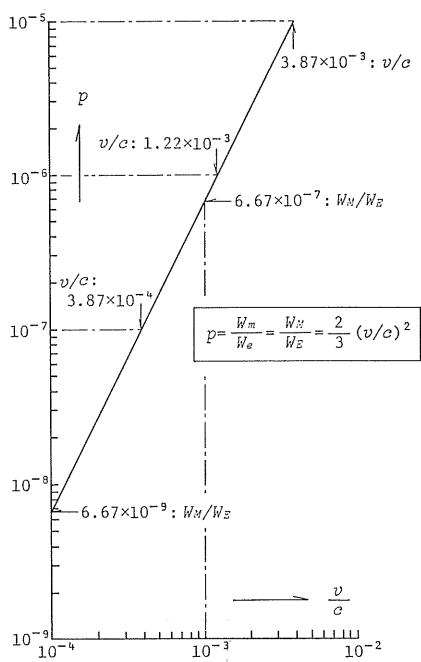


図 6 磁界エネルギー対電界エネルギー比と運動電荷速度 (球殻電荷)

Fig. 6 Relation between Magnetic energy to electric energy ratio and velocity of moving charge (Spherical shell charge).

球体および球殻体部分の領域のいかんを問わず、電荷中心からの距離 R には無関係で、方向角 θ だけの関数である。球外だけについては運動球面電荷に対しても成立し、

$$\frac{w_m}{w_e} = \left(\frac{v}{c} \sin \theta \right)^2 \quad (10)$$

式中の c はもちろん、真空中の光速で

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)} \quad (11)$$

6.2 両種のエネルギーの比較

同じく表 1, 2 から磁界エネルギーと電界エネルギーの比を調べてみると、領域のいかんにかかわらず一定、したがって全エネルギーについてもその比は一定。すなわち

$$p = \frac{W_{mE}}{W_{eE}} = \frac{W_{mI}}{W_{eI}} = \frac{W_{mS}}{W_{eS}} = \frac{W_M}{W_E} = \frac{2}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \quad (12)$$

一方、各領域が保有するエネルギーの比較が表 3 に示されている。これも表 1, 2 から摘記されたものである。前掲の図 6 にはこれらの比 p が v/c の関数として表わされている。

6.3 球外のエネルギー分布

球外のエネルギーとして、これまで提示してきた W_{eE} , W_{mE} 両者とも、式(5a), (7a)に見られるように、 $R =$

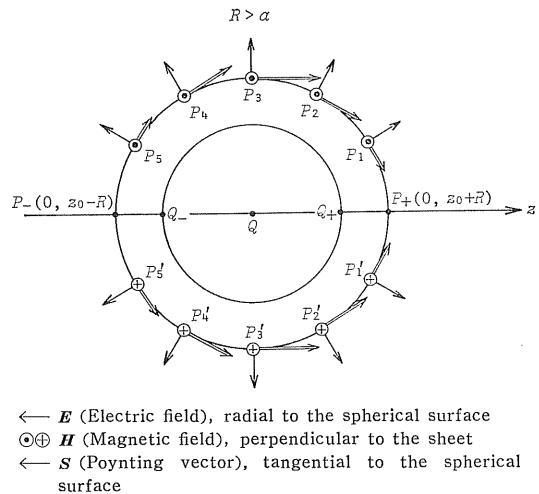


図 7 運動球体電荷による電界、磁界およびポインティングベクトル (球体電荷)

Fig. 7 Electric field, magnetic field and Poynting vector due to moving spherical-volume charge in free space (Spherical volume charge).

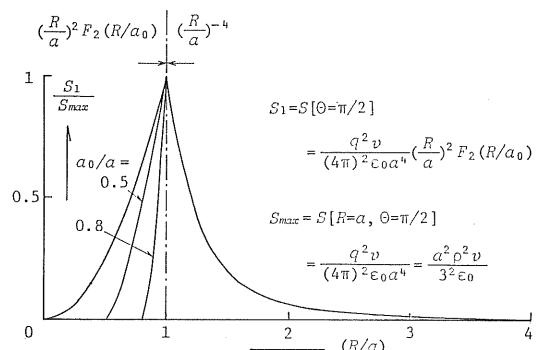


図 8 ポインティングベクトル (大きさ) 対半径方向距離 (球殻電荷)

Fig. 8 Poynting vector (magnitude) vs radial distance (Spherical shell charge). $F_2(R/a_0) = \{F_1(R/a_0)\}^2$, where $F_1(R/a_0) = g(R/a_0)/g(a/a_0)$.

$a \sim \infty$ にわたる全空間に及ぶものである。これに対し球外のある範囲 $R = a \sim ha$ ($1 < h$, 任意) に保有される静電エネルギー W_{eH} , 電磁エネルギー W_{mH} と全空間の W_{eE} , W_{mE} との、それぞれの比を求めるとき次のようになる。

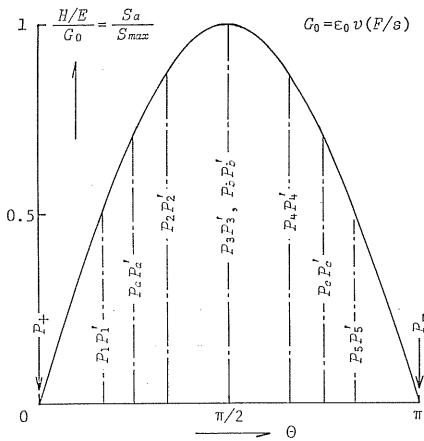


図 9 ポイントィングベクトル (大きさ) 対方向角; 磁界対
電界比対方向角 (球体電荷)

Fig. 9 Poynting vector (magnitude) vs directional angle; Magnetic field (Spherical volume charge).

$$\mu = \frac{W_{eH}}{W_{eE}} = \frac{W_{mH}}{W_{mE}} = 1 - \frac{1}{h} \quad (13)$$

図 10 はこの関係を示すものである。

6.4 点電荷のエネルギー

球体、球殻体および球面電荷において電気量 q を一定にしておき半径 $a \rightarrow 0$ の極限をとれば点電荷となる。その場合のエネルギーは両種とも無限大となる。そのうち W_E のほうは自己エネルギー (self energy) とよばれ、熟知のごとく、便宜上無限大となる自己エネルギーを除外して考えることにしている。

6.5 電磁界伝播の影響についての吟味

いまでもなく電磁界の時間的変化は光速 c で空間を伝播してゆく。したがって運動電荷中心から R だけ離れた点に電磁界が達するためには $t_c = R/c$ だけの時間がかかる。この時間内の電荷の移動距離は $Q Q_c = v t_c = R \cdot (v/c)$ となる (図 11 参照)。

当面の問題であるエネルギーに対する電磁界伝播の影響について考察しよう。便宜上、 $R \sim \infty$ および $R_c \sim \infty$ の

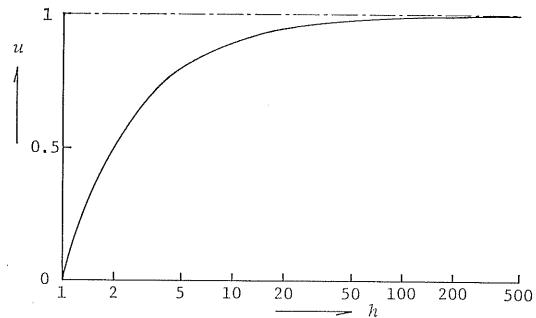
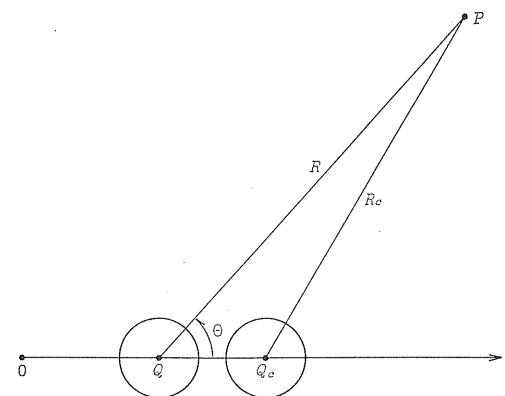


図 10 球外における電界エネルギーと磁界エネルギーの分布

Fig. 10 Distribution of electric energy and magnetic energy in external space of moving spherical charge.



Time	Position of Quellpunkt	Functional form of E , H at Aufpunkt P(s, z)
t	$Q(0, z_0)$	$f(s, z; z_0)$
$t + t_c$	$Q_c(0, z_0 + vt_c)$	$f(s, z; z_0 + vt_c)$

$t_c = R/c$,
 $R_c = \{R^2 + (vt_c)^2 - 2R(vt_c)\cos\theta\}^{1/2} \approx R\{1 - (v/c)\cos\theta\}$

図 11 電磁界伝播の影響を吟味するための説明図

Fig. 11 Explanatory figure for discussion of influence of electromagnetic-field propagation.

表3 エネルギーの領域による比較

Table 3 Comparison of electrostatic energy W_E with electromagnetic energy W_m in each region.

Energy	Region			
	Outside spherical shape	Inside spherical volume	Inside spherical-shell volume	On spherical surface
$W_E / \left\{ \frac{q^2}{\epsilon_0 a} \right\}$	$\frac{1}{8\pi}$	$\frac{1}{40\pi}$	$\frac{1}{40\pi} \cdot \frac{G(a/a_0)}{\{g(a/a_0)\}^2}$	0
$W_m / \left\{ \frac{\mu_0 (qv)^2}{a} \right\}$	$\frac{1}{12\pi}$	$\frac{1}{60\pi}$	$\frac{1}{60\pi} \cdot \frac{G(a/a_0)}{\{g(a/a_0)\}^2}$	0

表4 電子質量と電子半径の古典的評価

Table 4 Electron mass and electron radius from the standpoint of classical theory.

Quantity	Model	
	Spherical surface charge (uniform density), charged conducting sphere	Spherical volume charge (uniform density)
Electrostatic energy, W_E	$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e_0^2}{a} = \frac{\mu_0}{8\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a} \cdot c^2 = m_0 E c^2$	$\frac{3}{20\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e_0^2}{a} = \frac{3\mu_0}{20\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a} \cdot c^2 = m_0 M c^2$
Literature	5, 13	9, 10, 17
Electromagnetic energy, W_M	$\frac{\mu_0}{12\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a} \cdot v^2 = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e_0^2}{a} (v/c)^2 = \frac{1}{2} m_0 M v^2$	$\frac{\mu_0}{10\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a} \cdot v^2 = \frac{1}{10\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e_0^2}{a} (v/c)^2 = \frac{1}{2} m_0 M v^2$
Literature	4,	9, 12
Rest mass, $m_0 E$	$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{e_0^2}{a} = \frac{\mu_0}{8\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a}$	$\frac{3}{20\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{e_0^2}{a} = \frac{3\mu_0}{20\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a}$
Literature		10, 11, 12 16
Electromagnetic mass, $m_0 M$	$\frac{\mu_0}{6\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{e_0^2}{a}$	$\frac{\mu_0}{5\pi} \cdot \frac{e_0^2}{a} = \frac{1}{5\pi\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{e_0^2}{a}$
Literature	4,	7, 8, 9, 10, 12
Classical radius of electron, a_0	$a_0 = 2a = \frac{e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0 c^2}$	$a_0 = a = \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0 m_0 c^2}$
Literature	3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 14, 15, 16, 17	13

範囲のエネルギーを比較してみる。

電界エネルギーに対しては、

$$W_{e(R)} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}, \quad W_{e(R_c)} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R_c}$$

両者の差について

$$\begin{aligned} u_e' &= \frac{W_{e(R_c)} - W_{e(R)}}{W_{eE}} = \frac{(1/R_c - 1/R)}{1/a} \\ &= \frac{a(R - R_c)}{RR_c} \approx \left(\frac{a}{R}\right) \cdot \left(\frac{v}{c} \cos \theta\right) \end{aligned} \quad (14a)$$

次に磁界エネルギーについても同様に伝播によるエネルギー差の指標として

$$\begin{aligned} u_m' &= \frac{W_{m(R_c)} - W_{m(R)}}{W_{mE}} = \frac{a(R - R_c)}{RR_c} \\ &\approx \left(\frac{a}{R}\right) \cdot \left(\frac{v}{c} \cos \theta\right) \end{aligned} \quad (14b)$$

R として前々節の ha をとれば、上記 2 式から

$$u' \approx \frac{\beta}{h} \cos \theta < \frac{\beta}{h} \quad (14)$$

ここに $\beta = v/c$ は光速比。

1 例^{*1} として $v = 3 \times 10^6$ (m/s) したがって $\beta = 10^{-2}$ とし $h = 10^2$ とすれば、 $u' = 10^{-4} \ll 1$ 。この β に対して相対論的補正の目安となるローレンツ (Lorentz) 変換の係数は $\sqrt{1 - \beta^2} \approx 1 - 5 \times 10^{-5} \approx 1$ となり、ほとんど補正の必要はない。

7. 電子の質量および半径の求め方との関係

前章までの解析結果を基として、球状電荷を電荷 $-e_0$ の電子に置き換えると、表 1, 2 から一応、古典的な取扱いによる電子エネルギー、電子質量および電子半径についての表示が可能となる。それらの結果を内外の成書³⁻¹⁷⁾のそれらと比較対照せしめたものが表 4 に整理されている。

7.1 電子に関する実測値

電子について直接に測定されたのは電気量 e_0 と比電荷 e_0/m_0 である。これらは SI 単位で表わして

$$e_0 = 1.60 \times 10^{-19} \text{ (C)}$$

*1 この速さは運動球状電荷を電子と考えた場合の窒素原子 N の電離エネルギー (≈ 14.5 eV) に相当する。また $h = 100$ に対しては、前々節の $u = 0.99$ となり、 ha の範囲内にほぼ全エネルギーが存在するとみてよい。

$$e_0/m_0 = 1.76 \times 10^{11} \text{ (C/kg)}$$

静止質量 m_0 は直接には測られないが、上記から

$$m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ (kg)}$$

したがって電子電荷 ($-e_0$)、静止質量 m_0 は測定精度の範囲内で正確な値である。

7.2 電子のエネルギー

よく知られているように、物質の質量 m はエネルギー $W=mc^2$ と等価であることが相対論からの帰結である。ここに m は速度 v の場合の質量であって、 $v \approx 0$ の場合の静止質量 m_0 に対し、運動質量 m は次式で表わされる。 β^4 以下を無視して

$$m = m_0 [1 - \beta^2]^{-1/2} \approx m_0 [1 + (1/2) \beta^2], \\ \therefore mc^2 = m_0 c^2 + (1/2) m_0 v^2 \quad (15)$$

右辺第1項^{*2}はポテンシャル・エネルギーに、また第2項は運動エネルギーに相当する。それゆえ、表1、2と対照し

$$m_0 c^2 = (1/8\pi\epsilon_0) \cdot (e_0^2/a) \quad \text{or} \quad (3/20\pi\epsilon_0) \cdot (e_0^2/a) \quad (16)^{*3}$$

$$(1/2) m_0 v^2 = (\mu_0/12\pi) \cdot (e_0^2 v^2/a) \quad \text{or} \quad (\mu_0/10\pi) \cdot (e_0^2 v^2/a) \quad (17)$$

となる。いうまでもなく静止状態のポテンシャル・エネルギーは静電エネルギー W_E をもって代表、運動エネルギーは電磁エネルギー W_M に対応せしめた。

7.3 電子の質量

次に電子に対する W_E からの等価質量 m_{0E} 、 W_M からの等価質量 m_{0M} を求めてみよう。

$$m_{0E} c^2 = e_0^2 / 8\pi\epsilon_0 a \quad \text{or} \quad 3e_0^2 / 20\pi\epsilon_0 a \quad (16')$$

から

$$m_{0E} = \frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 a} = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\frac{e_0^2}{a} \right) \quad \text{or} \\ \frac{3e_0^2}{20\pi\epsilon_0 c^2 a} = \frac{3\mu_0}{20\pi} \left(\frac{e_0^2}{a} \right) \quad (18)$$

さらに

$$\frac{1}{2} m_{0M} v^2 = \frac{\mu_0}{12\pi} \cdot \frac{e_0^2 v^2}{a} \quad \text{or} \quad \frac{\mu_0}{10\pi} \cdot \frac{e_0^2 v^2}{a} \quad (17')$$

したがって

$$m_{0M} = \frac{\mu_0}{6\pi} \cdot \left(\frac{e_0^2}{a} \right) = \frac{e_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a} \quad \text{or} \\ \frac{\mu_0}{5\pi} \cdot \left(\frac{e_0^2}{a} \right) = \frac{e_0^2}{5\pi\epsilon_0 c^2 a} \quad (19)$$

^{*2} 真性エネルギー (intrinsic energy) ともよばれる。

^{*3} $c^2(\epsilon_0\mu_0) = 1$ という原理的関係があるから、同一の m_0 に対して式(16)(17)は両立しない(次節参照)。また、この式(16)より式(19)に至るまでの “or” は “球面電荷の場合 or 球体電荷の場合” の意味である。

このように導かれた電子の等価質量 m_{0E} 、 m_{0M} を前節の静止質量 m_0 と比較してみると

$$m_{0E} = m_0, \quad m_{0M} = (4/3) m_0 \quad (20)$$

表4に見られるように、電磁エネルギー W_M より導かれた m_{0M} を電子の電磁質量と呼ぶ流儀と、静電エネルギー W_E よりの m_{0E} を同じく電子の電磁質量とよぶ流儀がある。

$v/c \ll 1$ の範囲では式(15)の右辺第2項を省略し電子のエネルギーしたがって質量がすべて第1項のポテンシャル・エネルギーで代表されるとの立場から後者の m_{0E} をアブラハム (Abraham) は電磁質量と名づけた⁵⁾。

7.4 電子の半径

電子を球状電荷と仮定してきたので、その大きさは半径で代表されるのはいうまでもない。したがって、これまで諸式の a を電子の半径(とくに古典的電子半径という)と見なすのが自然である。文献13)はまさにその立場をとっており、球面電荷およびアブラハム電磁質量から

$$a = e_0^2 / 8\pi\epsilon_0 m_0 c^2 \quad (21)$$

7.1節の m_0 の値(実測値からの導出)を利用して古典的電子半径として次の値を導いている。SI, CGS, 2 様の単位を使って

$$a_0 = a = \begin{cases} \frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} \cdot \frac{e_0^2}{m_0} = 1.42 \times 10^{-15} \text{ (m)} \\ \frac{e_0^2}{2m_0 c^2} = 1.42 \times 10^{-13} \text{ (cm)} \end{cases} \quad (21')$$

その他の成書の多くはこの2倍として

$$a' = 2a = \begin{cases} \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{e_0^2}{m_0} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ (m)} \\ \frac{e_0^2}{m_0 c^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ (cm)} \end{cases} \quad (22)$$

を古典的電子半径としている。電子半径 a_0 を等価球の半径 a とするか、 $2a$ とするかについては、いずれにしても現在のところ近似的な値にすぎないのであるから、むしろ表式(とくにCGS系の場合)の単純な後者が選ばれたと考えておこう。

式(22)の値 2.82 と式(21')の2倍 2.84 との差異は測定値の選び方および数値計算における近似のとり方によるものであろう。その他の矛盾 $m_0 = m_{0E} \neq m_{0M}$ などは物理学基礎論の分野で問題にされるべきところ^{10,11)}であって、相対論を避けて古典的取扱いによった本研究の限界外の問題である。

8. あとがき

前報¹⁰で導いた3種の球状(球体、球殻およびその極

限としての球面) 電荷による電界ならびにその運動により生じた電流の解析結果を基として、磁界、電界エネルギー、磁界エネルギーおよび Poynting ベクトルの表式を整理することができた。さらに具体的に計算された結果を球状荷電粒子と見なされた電子に適用して、電子の電磁質量および古典的半径を求める方法を解説し、従来の諸家の記述と照合整理した。

$\beta \ll 1$ (光速比が 1 に比べて非常に小さい) 範囲の運動電荷を論じた本報ならびに前報¹⁾の研究はともに静電気学および静磁気学の領域を対象としたともいえる²⁾。両報告が広義の静電気学、すなわち相対論的取扱いを必要としない領域の運動電荷を論ずる電磁気学の研究者、教育者の参考となれば幸いである。

参考文献

- 1) 三好和憲、水野積成、関谷昌久、三好保憲: 静電気学会誌, 11 (1987) 192
- 2) 山内恭彦、高見頼郎訳: カンパニエーツ理論物理学, p. 136, 岩波 (1965); 佐野 理訳: カンパニエーツ理論物理学講義 II 相対論と電磁力学, p. 94, 東京図書 (1980)
- 3) 玉虫文一、ほか編: 岩波理化学辞典, pp. 464, 905, 岩波 (1981)
- 4) 竹山説三: 電磁気学現象理論, p. 328, 丸善 (1949)
- 5) 平川浩正: 電磁気学, pp. 63, 178, 培風館 (1968)
- 6) 小沢保知: 電磁気学, pp. 74, 321, 朝倉書店 (1974)
- 7) 砂川重信: 理論電磁気学, pp. 51, 52, 58, 340, 紀伊国屋 (1980)
- 8) 砂川重信: 岩波全書 333巻 電磁気学演習, p. 183, 岩波 (1982)
- 9) 玉木英彦、ほか訳: シュボルスキー原子物理学 I, pp. 35-40, 商工出版社 (1960)
- 10) 伊藤大介訳: ゾンマーフェルト理論物理学講座 III 電磁気学, pp. 315, 317, 講談社 (1979)
- 11) 小林澈郎訳: パウリ物理学講座 I 電磁気学, p. 151, 講談社 (1981)
- 12) J.H. Jeans: *Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, pp. 585-591, Cambridge Univ. Press, London (1927)
- 13) J.C. Slater and N.H. Frank: *Electromagnetism*, p. 101, McGraw-Hill, New York (1947)
- 14) R.B. Leighton: *Principles of Modern Physics*, pp. 50, 51, McGraw-Hill, New York (1959)
- 15) R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, p. 32-34, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1963)
- 16) C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman: *Berkeley Physics Course I—Mechanics*, pp. 72, 278, 279, McGraw-Hill, New York (1963)
- 17) E.H. Wichman: *Berkeley Physics Course III—Quantum Physics*, pp. 12, 13, 34, 406, 407, McGraw-Hill, New York (1967)