

論 文

自由空間中の運動電荷による電流

三好和憲*, 水野積成**, 関谷昌久***, 三好保憲****
(1986年10月1日受理)

Current Due to a Moving Charge in Free Space

K. MIYOSHI,* M. MIZUNO,** Y. SEKIYA*** and Y. MIYOSHI****
(Received October 1, 1986)

Electric current density \mathbf{J} and current I due to each of spherical volume, spherical surface and spheroidal volume charges moving in free space with arbitrarily specified velocity \mathbf{v} have been analyzed. \mathbf{J} and I due to a moving point charge are also calculated as a limit of these charges when their size becomes zero keeping the electric quantity q to be constant. Then an elementary length dl of conducting wire flowing I equivalent to the moving point charge qv can be concretely estimated.

1. まえがき

「運動荷電粒子のもたらす諸作用」は、われわれ電気工学、なかんづくその基礎をなす電気物理分野の研究者にとって「古くして、しかも永遠に新しい課題」である。かつて超高周波電子管に関連する分野の基礎的研究として「多導体系空間中の運動荷電粒子による導体回路への誘導電流」が、Shockley¹⁾およびRamo²⁾によって採り上げられた。前者は導体群に関するGreenの相反定理を、後者はベクトル場に関するGreenの相反定理を応用して、Shockley-Ramoの定理^{*1}を導いた。ま

た気体放電において2導体間の運動荷電粒子による瞬時電流の表式がエネルギー・バランス原理を基としたEngel-Steenbeckの解法によって導かれ、両氏による有名な著書³⁾に記載されたのをはじめ、v. Engel⁴⁾, Cobine⁵⁾らの書に引きつがれて解説され、多くの研究者の参考指針となってきた。

運動電荷に関する問題が、物理学の根本課題であることは、今世紀初頭を飾ったEinsteinの特殊相対性理論についての歴史的大論文⁶⁾の表題が“Zur Elektrodynamik bewegter Körper”であることからもうかがい知られる。それゆえに、物理学者にとって関心の深い「運動電荷に関する問題」はこのような「特殊相対性理論」に関連するものが主であって、広く参考とされている物理学書の中には「運動電荷」と題した章をもっぱらこの「特殊相対性理論」の解説にあてているもの⁷⁾がある。

本研究は、相対論の補正を必要としない程度の低い速さの運動荷電粒子を対象とする現象論的研究である。まず本報においては、球状(すなわち球体、それを一般化した球殻、ならびに後者の特別な場合の球面、さらにこれらの極限としての点)電荷および回転楕円体電荷が自由空間中を運動している瞬時の電流分布について具体的な解析結果を示している。

なお本課題は静電気学においてきわめて基礎的な事項であるにかかわらず定量的には深く追及されていないよ

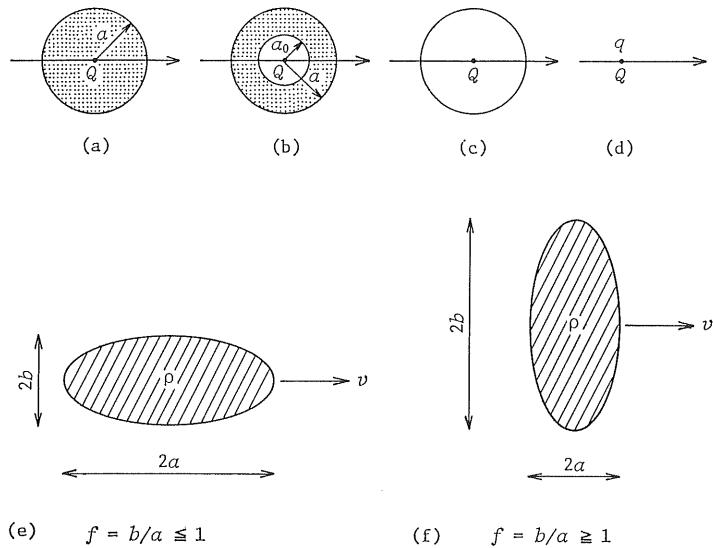
* 筑波大学電子情報工学系(305 茨城県新治郡桜村)
現在:工学院大学(160 東京都新宿区西新宿)
Department of Electronics and Information
Science, University of Tsukuba, Sakura-mura,
Niihari-gun, Ibaraki, 305 Japan
Present address: Kogakuen University, Nishi-
Shinjuku, Shinjuku-ku, Tokyo, 160 Japan

** 名古屋大学工学部原子核工学科(464 名古屋市千種区不
老町)
現在:名古屋女子商科短期大学(488 尾張旭市新居町)
Department of Nuclear Engineering, Faculty of
Engineering, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, 464 Japan
Present address: Nagoya Women's Junior College
of Commerce, Arai-cho, Owariasahi, 488
Japan

*** 大同工業大学電気工学科(457 名古屋市南区大同町)
Department of Electrical Engineering, Daido
Institute of Technology, Daido-cho, Minami-ku,
Nagoya, 457 Japan

**** 名古屋工業大学名誉教授(466 名古屋市昭和区御器所町)
Professor Emeritus, Nagoya Institute of Technology,
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya, 466 Japan

*1 『電気工学ハンドブック』(電気学会発行)213頁には
「Ramoの定理」として紹介されている。文献^{1,2)}からわ
かるように、Shockleyの発表のほうがRamoのそれよ
り1年早い。もっとも論文受理の日付から、両者が独立で
あるのは明らかであるゆえ、本文のように呼ぶのが適当で
ある。



(a) Spherical volume charge, (b) Spherical-shell volume charge, (c) Spherical surface charge, (d) Point charge, (e) Prolate spheroidal volume charge, (f) Oblate spheroidal volume charge

図 1 解析の対象となる軸対称分布の電荷

Fig. 1 Axially symmetrical charges studied in this paper.

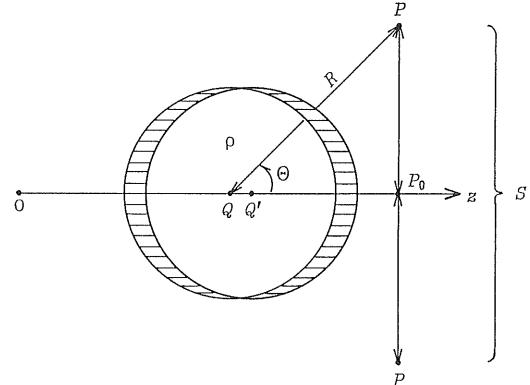
うに思われる。すなわち、一般論に終始し数値計算まで至っていないことであろう。したがって本報においては上記のような特別な形状の運動電荷を採り上げ具体的な実相の把握に努めるようにした。とくにこれら運動電荷の極限としての運動点電荷による電流を追及し、Bio-Savart の法則における電流素片 Idl と Lorentz 力の表式に現われる速度 v の運動点電荷 q による qv との等価性から、線素 dl の具体像を明らかにすることができた。

古典的ではあるが電磁気学の基礎的な課題を論及した本報告が、この分野の研究者、教育者の参考に資することができるよう念願して止まない。

2. 解析原理

前章で言及したように、対象とした運動電荷はすべて運動方向 (z 軸方向に採る)を中心軸とした回転対称の形状であって図 1 に示すような 6 種類である。

座標としては円柱座標 $(s = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi, z)$ を採る。図 2 に示すように、 z 軸を電荷中心（点電荷の場合には、その位置） Q の運動方向に選べば（回転椭円体の場合には、対称軸を運動方向とする）、すべての量が z 軸を中心として回転対称となるから ϕ に無関係となり、 $F(s, z)$ 形の関数表示が可能である。任意時刻 t における電荷中心の座標を $Q(0, z_0)$ とすれば、運動速度の大



$O(0,0)$: Origin of co-ordinate system.

$Q(0, z_0)$: "Quellenpunkt" (source point) at any time, t .

$Q'(0, z_0 + \delta z_0)$: "Quellenpunkt" (source point) at time, $t + \delta t$.

$P(s, z)$: "Aufpunkt" (point under consideration)

$P_0(0, z)$: Arbitrary point on z -axis

$S(s, z)$: "Aufkreis" (circle under consideration—centre, P_0 ; radius, $s = \overline{P_0 P}$)

図 2 座標系

Fig. 2 Co-ordinate system under consideration.

きさは

$$v = \frac{dz_0}{dt} \quad (1)$$

のように表わされる。この速さは、任意に与えられるとしておく。

考察点 $P(s, z)$ と源泉点 $Q(0, z_0)$ との距離を R , z 軸と \overline{QP} とのなす角を θ とすれば、これらは Q を新しく原点と見なす系の球座標 (R, θ, ϕ) に相当する。当然

$$R = \{s^2 + (z - z_0)^2\}^{1/2} \quad (2)$$

次に、運動電荷による電流（以後、たんに“運動電荷電流”とよぶ）密度 \mathbf{J} は、電荷のない場所では変位電流^{*2} (displacement current), $\mathbf{J}_D = \partial \mathbf{D} / \partial t$ だけである。ここに \mathbf{D} は考察点における電気変位(electric displacement)である。また電荷のある場所では、この形の電流密度のほかに、対流電流^{*3} (convection current) $\mathbf{J}_C = \rho \mathbf{v}$ がある。 ρ は考察点における運動電荷の体積密度である。このことを摘記すれば、

(i) 運動電荷のない場所では一般に、

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3)$$

(ii) 運動電荷のある場所では一般に

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_C + \mathbf{J}_D = \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

これらの関係を具体的に解説するために付録1において、球体の運動電荷による電流界 \mathbf{J} を球状電気分極による静電界 \mathbf{D} 、球状磁気分極による静磁界 \mathbf{B} に対比せしめた図、表を掲げておいた。

運動電荷電流密度 $\mathbf{J}(s, z)$ を求めるためには、上述のように考察点 P における電気変位 $\mathbf{D}(s, z)$ を導く必要がある。そのためには、いまでもなく次の2方法がある。

- (a) Gauss の線束定理を応用し直接に \mathbf{D} を導く。
- (b) 電荷のない場所では Laplace 方程式、電荷のある場所では Poisson 方程式を解き電位 V を求め、それより \mathbf{D} を導く。

3. 解析結果

3.1 電流密度と電流

前章の2解法のいずれによってもきわめて簡単に、静電界としての諸量すなわち電位 V 、電界 E 、電気変位 \mathbf{D} およびその z 成分 D_z 、 s 成分 D_s を導くことができ

表 1 自由空間中の運動球状電荷(球体、球殻、球面)による電流—球外

Table 1 Current due to a spherical-shape charge (spherical volume, spherical-shell volume, spherical surface) moving in free space—outside the sphere.

Quantity	Outside sphere $R > a$
Space charge density	0
Electric potential V	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$
Electric field E	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}$
Electric flux density, z -component D_z	$\frac{q}{4\pi} \cdot \frac{z-z_0}{R^3} = \frac{q}{4\pi R^2} \cos \theta$
Electric flux density, s -component D_s	$\frac{q}{4\pi} \cdot \frac{s}{R^3} = \frac{q}{4\pi R^2} \sin \theta$
Displacement current density, z -component J_{Dz}	$\frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^3} \left\{ -1 + 3 \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^2 \right\} = \frac{qv}{4\pi R^3} \left\{ -1 + 3 \cos^2 \theta \right\}$
Displacement current density, s -component J_{Ds}	$\frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \left(\frac{s}{R} \right) \left(\frac{z-z_0}{R} \right) \right\} = \frac{qv}{4\pi R^3} \left\{ 3 \sin \theta \cos \theta \right\}$
Convection current density, z -component J_{Cz}	0
Total current density, z -component J_z	$J_{Dz} = \frac{qv}{4\pi R^3} \left\{ -1 + 3 \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^2 \right\}$
Total current density, s -component J_s	$J_{Ds} = \frac{qv}{4\pi R^3} \left\{ 3 \frac{s(z-z_0)}{R^2} \right\}$
Total current density J	$[J_z^2 + J_s^2]^{1/2} = \frac{qv}{4\pi R^3} \left\{ 1 + 3 \left(\frac{z-z_0}{R} \right)^2 \right\}^{1/2}$
Directional angle of stream line (of current) α	$\tan^{-1} \frac{J_s}{J_z} = \tan^{-1} \frac{3s(z-z_0)}{-R^2 + 3(z-z_0)^2} = \tan^{-1} \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{-1 + 3 \cos^2 \theta}$
Current through Aufkreis $S(s, z)$, $I(s, z)$	$\frac{qv}{2R} \left(\frac{s}{R} \right)^2$

*2 電気変位の代りに電束密度 (electric flux density)、したがって変位電流の代りに電束電流 (flux current) ともいう。

*3 運送電流ともよぶ。

る。これらより順次、変位電流密度の z 成分 J_{Dz} 、同 s 成分 J_{Ds} 、対流電流密度の z 成分 J_{Cz} が導かれる。電荷の運動方向を z 軸に選んでいるから、それに直角な方向の対流電流密度 s 成分 J_{Cs} はゼロ。したがって運動電荷電流密度 \mathbf{J} の z 成分は $J_z = J_{Dz} + J_{Cz}$ 、同じく s 成分は $J_s = J_{Ds}$ 。もちろん \mathbf{J} の大きさ、 $J = (J_z^2 + J_s^2)^{1/2}$ 、方向角 $\alpha = \tan^{-1}(J_s/J_z)$ が求められる。さらに考察円 $S\{s, z\}$ 一点 $P_0(0, z)$ を中心とし z 軸に垂直な面内に含まれる半径 s の円内を通過する電流 $I\{s, z\}$ を求めることができる。図 2 参照。

3.2 球状電荷による電流密度

まず解析の最も簡単な球体電荷、それをやや一般化した球殻電荷、次いで球殻の厚み $(a - a_0)$ を無限小に（それに応じて体密度を無限大に）した極限としての球面電荷の場合の運動電荷電流が導かれ、それらの結果はそれぞれ表 1, 2, 3 に示されている。なお図 3 は球体電

荷、図 4 は球殻体電荷の運動電荷電流分布を示したものである。球殻の特別の場合 $a_0=0$ は球体の再現であり、 $a_0 \rightarrow a$ の極限は次の図 5 の球面電荷による面電流分布に帰す。もちろん、これら 3 種の場合において球外 ($R < a$) の流線分布は、全電荷 q が同一である限り、同一である。

付録 1 では、平等体密度球体電荷による運動電荷電流の界が、平等密度の球体電気分極による静電界ならびに球体磁気分極による静磁界に相似であることが解説されている。

3.3 点電荷による電流密度

前節の球体、球殻および球面の 3 者のいずれにおいても、それぞれ全電荷 q を一定に保ちつつ半径 $a (> a_0) \rightarrow 0$ の極限に達するようにすれば、図 6 のような運動点電荷による電流分布が得られる。これまでの所論からこの電流 [密度] 分布を示す流線は電気双極子ならびに磁気双

表 2 自由空間中の運動球体電荷および球殻電荷による電流—体内

Table 2 Current due to spherical volume charge and spherical-shell volume charge moving in free space—in the bodies.

Quantity	Inside spherical volume $R < a$	Inside spherical-shell volume $a_0 < R < a$
Volume charge density	$\rho = q \cdot \left[\frac{4\pi}{3} a^3 \right]^{-1}$ uniform density	$\rho = q \cdot \left[\frac{4\pi}{3} a^3 \cdot g(a/a_0) \right]^{-1}$ uniform density
V	$\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[a^2 - \frac{R^2}{3} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right\}$	$\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[a^2 - \frac{R^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{a_0^3}{R} \right]$
E	$\frac{\rho}{3\epsilon_0} R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(\frac{R}{a} \right)$	$\frac{\rho}{3\epsilon_0} R \cdot g(R/a_0)$
D_z	$\frac{\rho}{3} (z - z_0) = \frac{q}{4\pi a^2} \left(\frac{z - z_0}{a} \right)$	$\frac{\rho}{3} (z - z_0) \cdot g(R/a_0)$
D_s	$\frac{\rho}{3} s = \frac{q}{4\pi a^2} \cdot \frac{s}{a}$	$\frac{\rho}{3} s \cdot g(R/a_0)$
J_{Dz}	$-\frac{\rho v}{3} = -\frac{qv}{4\pi a^2}$	$-\frac{\rho v}{3} \cdot g(R/a_0) - \rho v \left(\frac{a_0}{R} \right)^3 \left(\frac{z - z_0}{R} \right)^2$
J_{Ds}	0	$-\rho v \left(\frac{a_0}{R} \right)^3 \cdot \frac{s(z - z_0)}{R^2}$
J_{Cz}	$\rho v = \frac{3(qv)}{4\pi a^3}$	ρv
J_z	$\frac{2}{3} \rho v = \frac{qv}{2\pi a^3}$	$\frac{2}{3} \rho v + \rho v \left(\frac{a_0}{R} \right)^3 \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{z - z_0}{R} \right)^2 \right\}$
J_s	0	$-\rho v \left(\frac{a_0}{R} \right)^3 \cdot \frac{s(z - z_0)}{R^2}$
J	$\frac{2}{3} \rho v = -\frac{qv}{2\pi a^3}$	$\frac{2}{3} \rho v \left[1 + \left(\frac{a_0}{R} \right)^3 \left\{ 1 - 3 \left(\frac{z - z_0}{R} \right)^2 \right\} + \left(\frac{a_0}{R} \right)^6 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{z - z_0}{R} \right)^2 \right\} \right]^{1/2}$
α	0	$\tan^{-1} \frac{-3a_0^3 \cdot s(z - z_0)}{2R^5 + a_0^3 \{ R^2 - 3(z - z_0)^2 \}}$
$I\{s, z\}$	$\frac{2}{3} \rho v (\pi s^2) = \frac{qv}{2a} \left(\frac{s}{a} \right)^2$	$\frac{2}{3} \rho v (\pi s^2) \cdot g(R, a_0) = \frac{qv}{2a} \left(\frac{s}{a} \right)^2 \cdot \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)}$

Notice : $g(u) = 1 - u^{-3}$, hence

$$g(a/a_0) = 1 - (a_0/a)^3, \quad g(R/a_0) = 1 - (a_0/R)^3$$

Spherical volume charge is, naturally, a special case of spherical-shell volume charge where $a_0=0$, $g(a/a_0)=1$ and $g(R/a_0)=1$. Spherical surface charge can be treated as a limiting case when $a_0 \rightarrow a$. Refer to A3 (Appendix).

表 3 自由空間中の運動球面電荷による電流—球面上

Table 3 Current due to a spherical surface charge moving in free space—on the spherical surface.

Quantity	On spherical surface $R=a$
Surface charge density V	$\sigma = q[4\pi a^2]^{-1}$ Uniform density $\frac{\sigma a}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$
E	$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = - \begin{cases} \sigma/\epsilon_0, & \delta \rightarrow 0 : \text{Outer surface} \\ 0, & \delta \rightarrow a : \text{Inner surface} \end{cases}$
D_z	$\sigma \frac{z-z_0}{a} \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = - \begin{cases} \sigma(z-z_0)/a, & \delta \rightarrow 0 : \text{Outer surface} \\ 0, & \delta \rightarrow a : \text{Inner surface} \end{cases}$
D_s	$\sigma \frac{s}{a} \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = - \begin{cases} \sigma s/a, & \delta \rightarrow 0 : \text{Outer surface} \\ 0, & \delta \rightarrow a : \text{Inner surface} \end{cases}$
Displacement surface current density, z -component, K_{Dz}	$-\sigma v \left(\frac{z-z_0}{a}\right)^2$
Displacement surface current density, s -component, K_{Ds}	$-\sigma v \left(\frac{s}{a}\right) \left(\frac{z-z_0}{a}\right)$
Convection surface current density, z -component, K_{Cz}	σv
Total surface current density, z -component, K_z	$\sigma v \left(\frac{s}{a}\right)^2$
Total surface current density, s -component, K_s	$-\sigma v \left(\frac{s}{a}\right) \left(\frac{z-z_0}{a}\right)$
Total surface current density, K	$\sigma v \left(\frac{s}{a}\right) = \frac{qv}{4\pi a^2} \left(\frac{s}{a}\right)$
Directional angle of stream line, α	$\tan^{-1} \left(-\frac{s}{z-z_0}\right) = \Theta - \frac{\pi}{2}$
Current through Aufkreis S on the spherical surface, I	$K \cdot 2\pi s = 2\pi \sigma v \frac{s^2}{a} = \frac{qv}{2a} \left(\frac{s}{a}\right)^2$

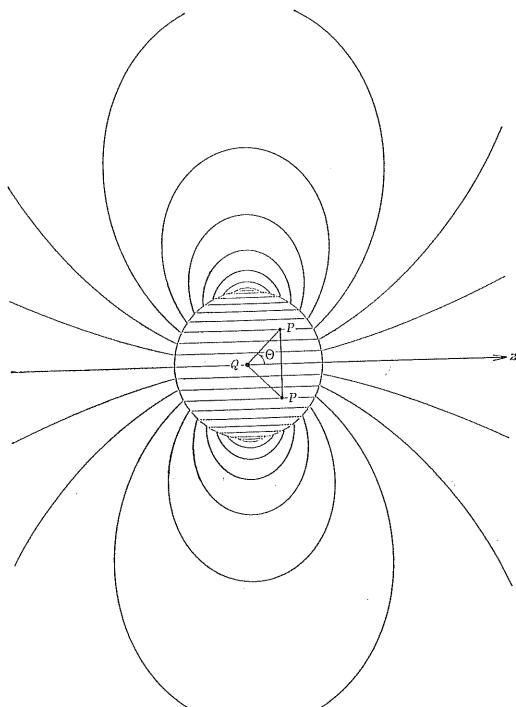


図 3 自由空間中の平等密度球体電荷の運動による電流分布

Fig. 3 Distribution of electric current due to a moving spherical volume charge of uniform density in free space.

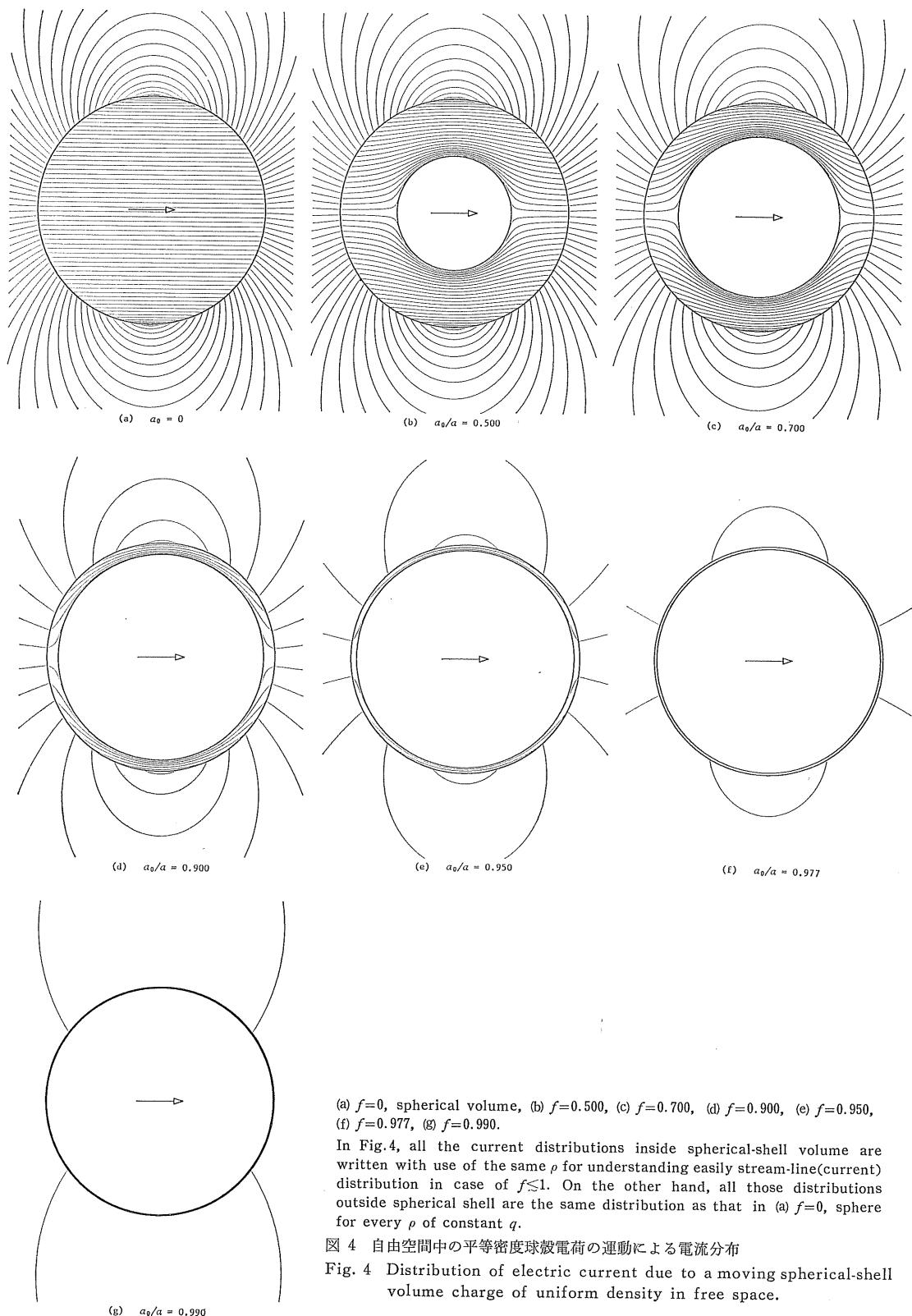


図 4 自由空間中の等密度球殻電荷の運動による電流分布

Fig. 4 Distribution of electric current due to a moving spherical-shell volume charge of uniform density in free space.

In Fig. 4, all the current distributions inside spherical-shell volume are written with use of the same ρ for understanding easily stream-line(current) distribution in case of $f \leq 1$. On the other hand, all those distributions outside spherical shell are the same distribution as that in (a) $f=0$, sphere for every ρ of constant q .

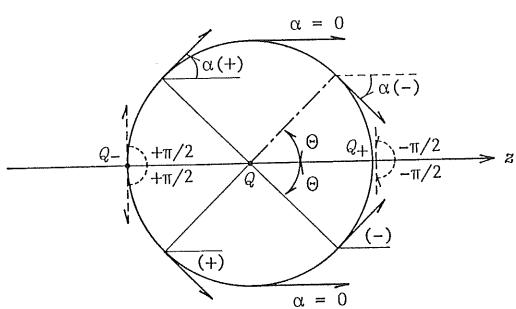


図 5 自由空間中の平等密度球面電荷の運動による面電流分布

Fig. 5 Distribution of surface current on the sphere due to a moving spherical surface charge of uniform density in free space.

極子の力線分布と完全に相似であることはいうまでもない。

3.4 球形電荷による電流^{*4}

前々節および前節では流線分布すなわち電流密度 \mathbf{J} の分布を明示した。本節では考察円 $S\{s, z\}$ を通る電流、 $I_z\{s, z\} = I\{s, z\}$ について考えよう。

球体および球殻については、表 1 および表 2 にこの電流の表式が提示されている。表に明示されているように考察円 S が球殻外にある場合には

$$I\{s, z\} = \frac{qv}{2R} \left(\frac{s}{R}\right)^2 = \frac{qv}{2R} \sin^2 \theta \quad (5.1)$$

また S が球殻実質内にある場合には

$$I\{s, z\} = \frac{qv}{2R} \left(\frac{s}{R}\right)^2 \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)};$$

関数形 g については表 2 参照 (5.2)

もちろん、 S が球殻空洞内にある場合には

$$I\{s, z\} = 0 \quad (5.3)$$

付録 2において言及し付図 2 に示しているように、考察円の立場^{*5}が球殻外では 3 種(図の 1, 2, 3), 球殻実

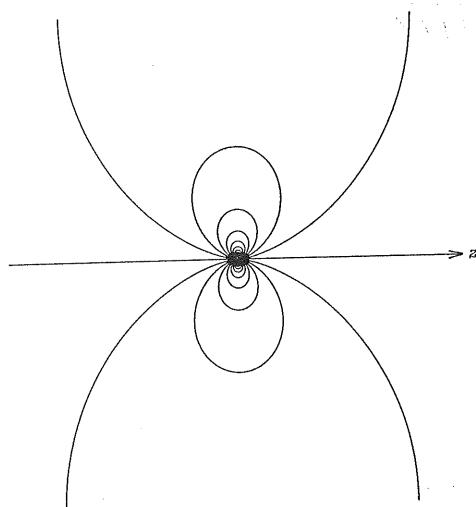


図 6 自由空間中の点電荷の運動による電流分布

Fig. 6 Distribution of electric current due to a moving point charge in free space.

質内では 2 種(図の a, b) あり J_z を積分する場合に異なった計算を行なうのであるが、導かれる電流表式は、上記(5.1), (5.2)によって代表される。

球面電荷の場合には球殻実質内の体電流密度 \mathbf{J} (A/m^2) とは異質の面電流密度 $K(A/m)$ が対応するため、表 3 に見られるように $I \approx I_z$ となっている。

球状電荷による運動電荷電流 I の最大値 I_{max} は表 1 ~ 3 から

$$I_{max} = I\{a, z_0\} = qv/2a \quad (6)$$

となる。すなわち電荷中心 Q を中心にもつ半径 a の円、 $S\{a, z_0\}$ (いわゆる球の大円) を考察円とした場合である。図 7 は $z = z_0$ (一定), s 可変の場合の電流 $I_0 = I\{s, z_0\}$ を画いたものである。

運動点電荷は球体電荷において “ q 一定, $a \rightarrow 0$ ” の極限の場合として取り扱うことができる。その場合

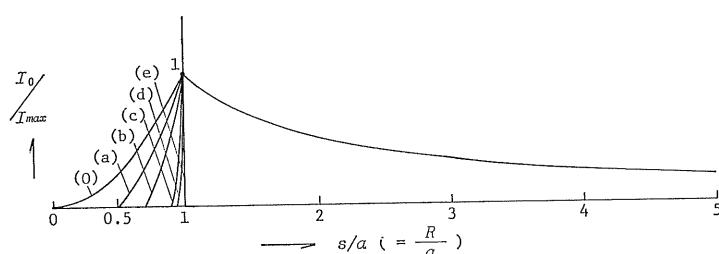


図 7 考察円 $S\{s, z_0\}$ を通る電流 $I\{s, z_0\}$

Fig. 7 Current $I\{s, z_0\}$ through circle $S\{s, z_0\}$.

^{*4} 球体、球殻および球面を総称して「球状」とよび、さらに点をも加えた形を「球形」とよぶ。

^{*5} 球体の場合には球体外では 2 種(付図 2 の 1, 2), 球体内部では 1 種(付図 2 の a) だけである。

$$I_q = \lim_{a \rightarrow 0} I_{\max} = \infty \quad (7)$$

すなわち無限小の体積内に無限大の電流が通ることとなる。換言すれば、自由空間中の運動点電荷電流は、点電荷を出発した無限大の電流が変位電流の形で空間を流れ、再び点電荷に帰着し点電荷自身を介して閉路を形成している。

3.5 回転楕円体電荷による電流

次に図1(e)(f)に記してあるような平等体密度の回転楕円体電荷の運動電荷電流について考えよう。

電荷の形状は回転楕円面の方程式：

$$s^2/b^2 + (z-z_0)^2/a^2 = 1 \quad (8)$$

で表わされる。これは中心 $Q(0, z_0)$ 、 z 軸方向の半径 a 、 s 軸方向の半径 b で、 z 軸を回転対称の中心軸とする回転楕円体の表面（曲面）を表わす。 a 、 b の大小関係すなわち係数 $f=b/a$ の大きさによって、次の3種類に分けられる。

(+) $b < a$, $f < 1$: 長回転楕円体、図1(e)

(0) $b=a$, $f=1$: 球、図1(a)

(-) $b > a$, $f > 1$: 短回転楕円体、図1(f)

表4に楕円体内的諸量の表式が記述されている。幸い体内にあっては変位電流を導くための D_z が初等関数で表わされ、表に付記してある係数 F_D または F が比較的容易に計算される。図8は F 対 f の関係を一見してわかるようにした計算曲線である。

4. 運動点電荷と等価な電流素片の具体像

電磁気学の教科書には「外部磁界 \bar{B} 内にある電流素片 Idl が受ける力は $F=[Idl \times \bar{B}]$ 」、同じく \bar{B} 中を速度 v で運動する点電荷 q が受ける Lorentz 力は $F=[qv \times \bar{B}]$ であって電流素片 Idl は運動点電荷 qv と等価である。すなわち $Idl=qv$ 」とされている。

前章の解析によって、自由空間中の運動点電荷による電流分布の形は、2重極による流線分布と相似であって点電荷より電流は発しましたそこに帰る閉路である。また点電荷から出入する電流の大きさ I は無限大となるゆ

表4 自由空間中の回転楕円体電荷の運動による電流—体内

Table 4 Current due to a spheroidal volume charge moving in free space—in the body.

Volume charge density	$\rho = q \cdot \left[\frac{4}{3} \pi ab^2 \right]^{-1}$
Electric potential V	$V = V_0 - A(z-z_0)^2 - Bz^2$
Electric flux density, z -component	$D_z = 2\epsilon_0 A(z-z_0)$
Electric flux density, s -component	$D_s = 2\epsilon_0 Bz$
Displacement current density, z -component	$J_{Dz} = -2\epsilon_0 Av = (\rho v)(-F_D)$
Displacement current density, s -component	$J_{Ds} = 0$
Convection current density, z -component	$J_{Cz} = \rho v$
Total current density, z -component	$J_z = (\rho v) F \quad F = 1 - F_D$
Total current density, s -component	$J_s = 0$
Total current density	$J = J_z = (\rho v) F$
Current through Aufkreis $S(s, z)$	$I(s, z) = J \cdot \pi s^2 = (\rho v) \pi F s^2 = \frac{qv}{2a} \cdot \frac{3}{2} F \cdot \left(\frac{s}{b} \right)^2$

Notice :

(1) Electric volume charge distributes in spheroid whose centre is $Q(0, z_0)$. This spheroid is revolutionarily symmetrical to z -axis. Therefore, s -component of convection current density, $J_{Cs}=0$.

(2) Coefficients A , B and V_0 are as follows.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{ab^2}{4\epsilon_0} \rho \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{1/2} \cdot (b^2+u)}, \quad B = \frac{ab^2}{4\epsilon_0} \rho \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{1/2} \cdot (b^2+u)^2} \\
 V_0 &= \frac{ab^2}{4\epsilon_0} \rho \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{1/2} \cdot (b^2+u)} \\
 (8) \quad F_D &= \frac{a^2 b}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)^{3/2} \cdot (b^2+u)} \quad f = b/a \\
 &= \frac{ab^2}{a^2-b^2} \times \left\{ -\frac{1}{a} + \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \tanh^{-1} \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}, \end{cases} \right\} \dots b \leq a. \\
 &= \begin{cases} \frac{f^2}{1-f^2} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \tanh^{-1} \sqrt{1-f^2} \right), \\ -\frac{f^2}{f^2-1} \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{f^2-1}} \tan^{-1} \sqrt{f^2-1} \right) \end{cases} \dots f \geq 1
 \end{aligned}$$

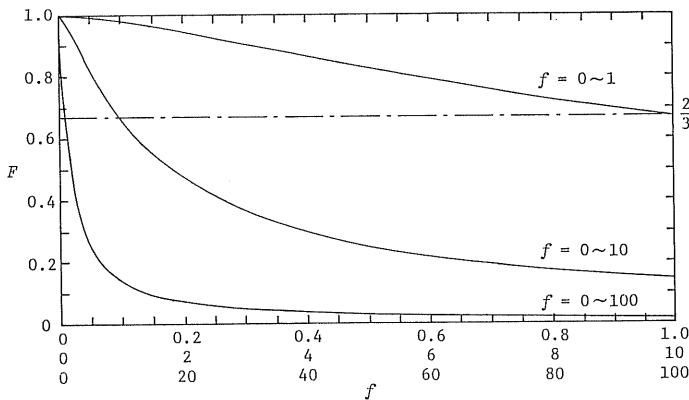
図 8 回転椭円体の半径比 f の関数として表わされた係数 F

Fig. 8 Factor F for spheroidal charge expressed as a function of ratio of radii, $f=b/a$.

え、有限確定量 qv [単位, A·m] に応ずる線素 dl は無限小とならざるをえないことは当然である。この線素が

$$dl = qv/I \quad (9)$$

という条件によって無限大の I に付随することはわかるが、具体的な実態は定かではない。その具体像を明らかにするためには、点電荷を極限として収束した原形の運動電荷から調べてゆくことが必要である。表 5 はこれに答えた例である。これは最大電流 I_{\max} を対象とした場

合であるから、与えられた qv に対応する線素としては最小のものを選んだことになる。図 9 参照。

他の例として、ある種の電流平均値を算定しそれに対する電流素片を求めた例が表 6 に示されている。平均値としては、 z 軸に沿って採ったもの（脚字 1）と s 軸に沿って採ったもの（脚字 2）を掲げておいた。この種の平均値はそれ自体としては物理的意義をほとんどもない。ただ電流ならびに線素の値がどの程度の範囲内にあるかの知見がえられるに止まる。すなわち前者の平均

表 5 運動点電荷 (qv) と等価な電流素片 (Idl) の具体像

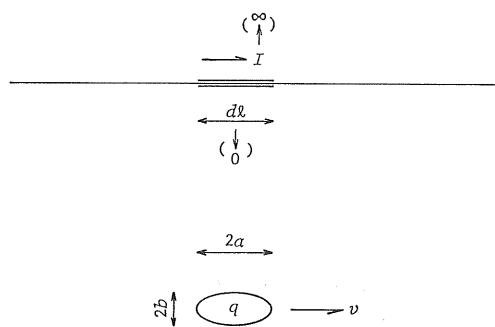
Table 5 A concretely specified feature of current element (Idl) equivalent to a moving point charge (qv).

Quantity	Original shape of moving charge	Spherical (spherical volume, spherical surface, spherical-shell volume)	Spheroidal
Maximum current, I_{\max}		$I\{a, z_0\} = \frac{qv}{2a}$	$I\{b, z_0\} = \frac{qv}{2a} \cdot \left(\frac{3}{2}F\right)$
Minimum line element corresponding to I_{\max} , dl_{\min}		$2a$	$2a \cdot \left(\frac{2}{3F}\right)$

表 6 運動点電荷 (qv) と等価な電流素片 (Idl) —補遺

Table 6 A concretely specified feature of current element (Idl) equivalent to a moving point charge (qv)—supplementary.

Quantity	Original shape of moving charge	Spheroidal volume charge
Average value of current	I_1	$\frac{qv}{2a} F$
	I_2	$\frac{qv}{4a} \cdot \frac{F}{f^2}$
Line element corresponding to the above-mentioned average current	dl_1	$2a \left(\frac{1}{F}\right)$
	dl_2	$2a \left(\frac{2f^2}{F}\right)$

図 9 運動点電荷 qv に等価な電流素片 Idl Fig. 9 Current element Idl equivalent to a moving charge qv .

値では、球状の場合の線素最小値 $dl_{\min} (=2a)$ の $1/F$ 倍、後者の平均値では、この dl_{\min} の $2f^2/F$ 倍となっている。

5. あとがき

無限に広い自由空間中を運動する平等体密度の球体、球殻および回転楕円体などの電荷さらには球殻の極限としての平等面密度の球面電荷による電流分布を解析し、以下諸項に列記するような結果を得た。

1) 以上の4種の運動電荷による考察点 $P(s, z)$ における電流密度 \mathbf{J} および考察円 $S\{s, z\}$ を通る電流 I を表示し、数値計算によって \mathbf{J} の流線分布すなわち電流分

布をグラフにすることができた。

2) 運動球面電荷による球面上の面電流密度 K を、球殻の極限として容易に導くことができた。

3) これらの運動電荷の量 q を一定に保ち、体積を無限小とした極限はいずれも運動点電荷に帰すことから、運動点電荷による電流分布を定量的に論ずることができた。電流分布としては、無限大の電流が点電荷から出発し点電荷に終着する形で流線が通じ自ら閉路を形成している。

4) 運動点電荷 qv に等価な電流素片 Idl の線素 dl について、運動点電荷の原形を参照することにより、その具体像を明らかにした。

5) 界の根源 P, M と ρv の比較対応を明らかにすることにより、静電界 D 、静磁界 B と電流界 J の相似対応を明確化した。すなわち球体電荷、球殻電荷、球面電荷、回転楕円体電荷および点電荷による運動電荷電流密度 J の流線分布はそれぞれ同じ形状の電気または磁気の二重極による電束密度 D または磁束密度 B の流線分布と同形であることが確認された。このことは電磁気学を理解せしめるという教育的見地から有益であろう。

参考文献

- 1) W. Shockley : J. Appl. Phys., 9 (1938) 635
- 2) S. Ramo : Proc. I.R.E., 27 (1939) 584
- 3) A.v. Engel and M. Steenbeck : *Elektrische Gasentladungen*, Vol. 1, pp. 1, 144, Julius Springer,

付表 1 静電界、静磁界および電流界の比較対応

Table A1 Current field (J) in comparison with electrostatic field (D) and magnetostatic field (B).

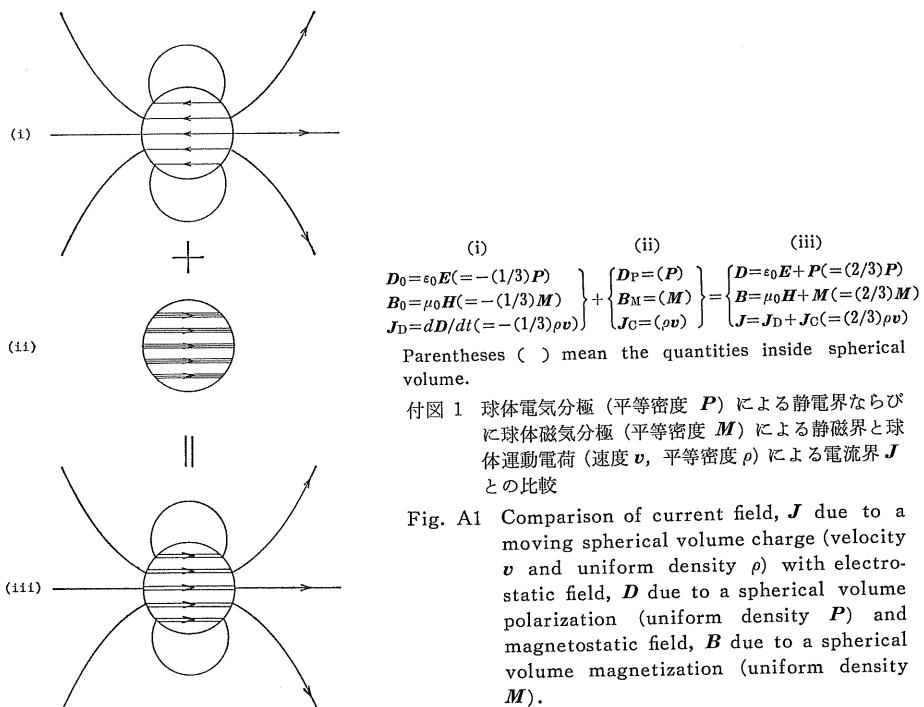
Field	Quantity	Rotational	Outside sphere	Inside sphere	Original source of field
Electrostatic field	Electric flux density, D	$\text{div } D=0$	$D=D_0=\epsilon_0 E$	$D=D_0+D_P=\epsilon_0 E+P$	$P=\lim_{z \rightarrow 0} \rho \cdot \delta z_0$
Magnetostatic field	Magnetic flux density, B	$\text{div } B=0$	$B=B_0=\mu_0 H$	$B=B_0+B_M=\mu H+M$	$M=\lim_{z \rightarrow 0} m \cdot \delta z_0$
Electric current field	Electric current density, J	$\text{div } J=0$	$J=J_D=\frac{\partial D}{\partial t}$	$J=J_D+J_C=\frac{\partial D}{\partial t}+\rho v$	$\rho v=\lim_{z \rightarrow 0} \rho \left(\frac{1}{\delta t} \cdot \delta z_0 \right)$

Notice : (1) D for electrostatic field and D for electric-current field are not identical but different notwithstanding the same symbol.

(2) Such a relation among 3 fields in this table is applicable not only to spherical shape but also to more general shape, e.g. spheroidal shape.

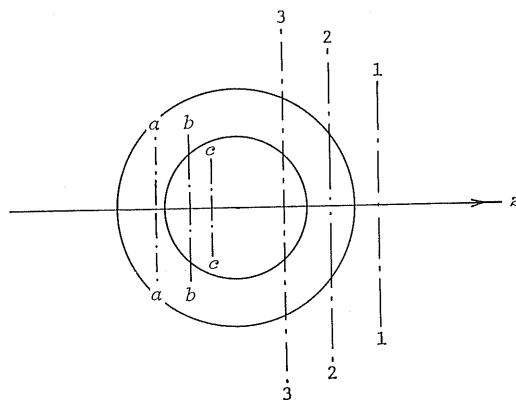
(3) The original source of field is P (permanent electric polarization) for electrostatic field, M (permanent magnetic polarization or magnetization) for magnetostatic field and ρV for electric-current field.

(4) ρ in electric-current field is always finite and determinate. On the contrary, ρ in electrostatic field becomes infinite together with δz_0 becoming infinitesimal; corresponding to the latter, $(1/\delta t) \rightarrow \infty$ and $\delta z_0 \rightarrow 0$ with finite $v = \lim(\delta z_0/\delta t)$ in the former.



付図 1 球体電気分極(平等密度 P)による静電界ならびに球体磁気分極(平等密度 M)による静磁界と球体運動電荷(速度 v , 平等密度 ρ)による電流界 J との比較

Fig. A1 Comparison of current field, J due to a moving spherical volume charge (velocity v and uniform density ρ) with electrostatic field, D due to a spherical volume polarization (uniform density P) and magnetostatic field, B due to a spherical volume magnetization (uniform density M).



Position Figure number	z	s	Region
# 1	$a < z - z_0 $		
# 2	$a_0 < z - z_0 < a$	$a < s$	Outside spherical-shell
# 3	$ z - z_0 < a_0$		
# a # b		$a_0 < s < a$	Inside spherical-shell volume
# c	$\sqrt{s^2 + (z - z_0)^2} < a_0$		In hole

付図 2 運動球殻電流に対する種々の考察円

Fig. A2 Various kinds of "Aufkreis" (Circle under consideration) through which currents flow.

- Berlin (1932)
- 4) A.v. Engel : *Ionized Gases*, p.22, Oxford University Press, London (1965)
 - 5) J.D. Cobine : *Gaseous Conductors*, p.55, McGraw-Hill, New York (1941); Dover Publications, New York (1958)
 - 6) A. Einstein : Ann. Phys., 17 (1905) 891
 - 7) E.M. Purcell : *Electricity and Magnetism—Berkeley Physics Course*, II, pp.147-181, McGraw-Hill, New York (1965)

付 錄

A1. 静電界、静磁界および電流界の比較

付表1および付図1によって、これら3種の界の相似性が十分に理解される。これらの界はいずれも無源泉の「有渦界 (rotational field)」である。すなわち界の力線(または流線)は閉路をなす。

$$\operatorname{div} \mathbf{D}=0, \operatorname{div} \mathbf{B}=0, \operatorname{div} \mathbf{J}=0 \quad (\text{A}\cdot1)$$

A2. 電流の計算

球状電荷の運動による電流 $I\{s, z\}$ の計算に際しての注意を述べておく。一般的形状の球殻の場合には考察円Sの位置は付図2に示すように、球外の #1, #2, #3, 球殼体内の #a, #b, 空洞部分の #c の6種がある。

$$I\{s, z\} = I_z\{s, z\} = \int_S J_z dS \quad (\text{A}\cdot2)$$

それぞれ積分範囲を異にしているが、上式の積分結果は次のように整理される。

$$I\{s, z\} = \begin{cases} \frac{qv}{2} \cdot \frac{s^2}{R^3} & S \text{ が球外} (\#1, \#2, \#3) \\ \frac{qv}{2} \cdot \frac{s^2}{R^3} \cdot \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)} & S \text{ が球殼体内} (\#a, \#b) \\ 0 & S \text{ が球殼空洞} (\#c) \end{cases}$$

ここに

$$g(x/a_0) = 1 - (a_0/x)^3 \quad (\text{A}\cdot3)$$

A3. 球殼電荷の極限としての球面電荷の導来 (表2, 3 参照)

球面電荷は球殼電荷の全電荷 q をそのまま固定し($a-a_0 \rightarrow 0$)の極限として取り扱う。 $a_0 < R < a$ の順序を保ちつつ、無限小の2量を

$$\Delta = \frac{a-a_0}{a}, \quad \delta = \frac{R-a_0}{a}; \quad 0 \leq \delta \leq \Delta \quad (\text{A}\cdot4)$$

とおけば、球殼に特有の係数 $g(a/a_0)$ 、関数 $g(R/a_0)$ その他は

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a_0}{a}\right)^n &= 1-n\Delta, \quad \left(\frac{a_0}{R}\right)^n = \frac{(1-\Delta)^n}{(1-\delta)^n} = 1-n(\Delta-\delta) \\ g(a/a_0) &= 1 - (1-\Delta)^3 = 3\Delta, \quad g(R/a_0) = 3(\Delta-\delta) \\ \frac{g(R/a_0)}{g(a/a_0)} &= 1 - \frac{\delta}{\Delta} \end{aligned} \right\}$$

$$= \begin{cases} 1 \cdots \delta = 0, (R \rightarrow a) & \text{球殼体外側の極限としての球外面} \\ 0 \cdots \delta = \Delta, (R \rightarrow a_0) & \text{球殼体内側の極限としての球内面} \end{cases} \quad (\text{A}\cdot5)$$

電荷密度は

$$\lim_{\substack{a \rightarrow a_0 \\ \delta \rightarrow \infty}} \{\rho \cdot (a-a_0)\} = \lim_{\substack{a \rightarrow a_0 \\ \delta \rightarrow \infty}} \left\{ \frac{q}{(4/3)\pi a^3 \cdot g(a/a_0)} \cdot a\Delta \right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi a^2} = \sigma \quad (\text{A}\cdot6)$$

上記の式(A·5)(A·6)によって表2の諸量から表3の諸量がえられる。なお表3の面電流密度 K について、
 $K = \lim \{J \cdot (a-a_0)\} \quad (\text{A}\cdot7)$
 のような極限量を考えることにし、表3を導いた。